

= כפייה (ע"פ תכונות $\aleph_1$)

$\aleph_1$ תהיה: מרחב וקטורי אי-מסתיים, $\aleph_1$ תהיה: מרחב וקטורי $\aleph_1$ + $\aleph_1$ סופי.

מבנה הקושר: $\aleph_1$ - מרחב וקטורי סופי; $\aleph_1$ - אחרת כהן (= כפייה).

(הערה): קושר/כ"ל (רוב המרחב $\aleph_1$ ל.ה.)

Kunen: סעיף 1.10

התוצאה: קושר/כ"ל (Kunen, Ch. III)

$$V = \bigcup_{\alpha \in ON} V_\alpha$$

$$\begin{cases} V_0 = \emptyset \\ V_{\alpha+1} = P(V_\alpha) \\ V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta \quad (\alpha \text{ limit}) \end{cases}$$

* V_α : סדר α (תוצאה)

$$V_\beta \subset V_\alpha \leftarrow \beta < \alpha$$

(אין צורך α).

$$(x \in V) \quad \text{rank}(x) = \min\{\alpha : x \in V_{\alpha+1}\} *$$

הן בסדרים הסופיים מוסגים דברים חדשים.

$$\alpha < \beta \text{ סדר } x \in V_\beta, x \notin V_\alpha, x \in V_\alpha \leftarrow \alpha = \text{rank}(x) \therefore$$

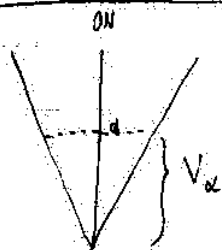
$$[x_1 \in x, \text{rank}(x_1) < \text{rank}(x)] \quad \forall \text{ סדר } y \in x \text{ (כל סדר)} \quad \text{rank}(x) = V$$

* מרחב וקטורי

$$(x \in V_{\alpha+1} \leftarrow x \in V_\alpha \leftarrow \alpha = \sup\{\text{rank}(y) : y \in x\})$$

$$V_\alpha = \{x : \text{rank}(x) < \alpha\} *$$

$$\text{rank}(y) = \sup\{\text{rank}(x) + 1 : x \in y\} \therefore \text{rank}(x) < \text{rank}(y) \leftarrow x \in y \therefore$$



$$V_\alpha \cap ON = \alpha \quad ; \quad \text{rank}(\alpha) = \alpha \therefore$$

$$\text{rank}(x) + \omega > \{x\}, p(x), \cup x \text{ if } \omega \leq \text{rank}(x)$$

$$\max\{\text{rank}(x), \text{rank}(y)\} + \omega > \{x, (x,y), \{x,y\}, x \cap y, x \cup y, x \times y\}$$

$$N, Z, Q, R, C \in V_{\omega+\omega} \text{ : } *$$

$$(\text{in } \bar{V} \text{ "set-like"}) : (V_n) |V_n| < \aleph_0$$

$$|V_\omega| = \aleph_0$$

$$(\alpha \text{ "set-like"}) : |V_{\omega+\alpha}| = \aleph_\alpha$$

$$(\text{if } R \text{ is a } \omega\text{-seq. then } A \subseteq \bar{V} \text{ is } R\text{-closed})$$

rank of A is X if A is X -closed and A is not $(X+1)$ -closed. R is a ω -seq. if R is a ω -seq. of $\bar{V}$ and R is R -closed.

$$R \text{ is a } \omega\text{-seq.}$$

rank of A is X if A is X -closed and A is not $(X+1)$ -closed. R is a ω -seq. if R is a ω -seq. of $\bar{V}$ and R is R -closed.

"set-like"

$\{b \in A : b R a\}$, $a \in A$ is R -closed if R is a ω -seq. of $\bar{V}$ and R is R -closed.

$$F: A \times V \rightarrow V$$

$x \in A$ is $G(x) = F(x, G|_{\{a \in A : a R x\}})$ if $G: A \rightarrow V$ is a ω -seq. of $\bar{V}$ and G is G -closed.

* rank of ON is ω , and rank of $\bar{V}$ is ω .

$$\text{rank}(x) = \sup\{\text{rank}(y) + 1 : y R x\}$$

$$(a \in A) \text{ rank}_R(a) = \sup\{\text{rank}_R(b) + 1 : b R a\} \text{ if } R \text{ is a } \omega\text{-seq. of } \bar{V}$$

Mastowski's Lemma: If R is a ω -seq. of $\bar{V}$ and R is R -closed, then A is R -closed.

$$(M, \epsilon) \cong (A, R) \text{ if } M \text{ is a } \omega\text{-seq. of } \bar{V} \text{ and } M \text{ is } M\text{-closed}$$

$$M \text{ is a } \omega\text{-seq. of } \bar{V} \text{ and } M \text{ is } M\text{-closed}$$

$$(\{0, 1\}, \epsilon) \cong (\{0, 1\}, \epsilon)$$

$$M = ON \leftarrow \text{rank of } A \text{ is } M \leftarrow \text{rank of } A \text{ if } R \text{ is a } \omega\text{-seq. of } \bar{V}$$

$$(M, \epsilon) \cong (A, \epsilon) \text{ if } A \text{ is a } \omega\text{-seq. of } \bar{V} \text{ and } A \text{ is } A\text{-closed}$$

3.1: V_{X_2} is a model

[...]

$$(V_{X_2} \models \varphi(a_1, \dots) \Leftrightarrow S \models \varphi(a_1, \dots), a_{i,j} \in S \text{ for } i, j) \text{ is a } \Sigma_1 \text{-elementary embedding } (S, \epsilon) \hookrightarrow (V_{X_2}, \epsilon)$$

$$V_{X_2} \models \varphi(\omega^S) \Leftrightarrow S \models \varphi(\omega^S) \text{ for } S \models \omega^S \text{ and } S \models \exists x \varphi(x) \Leftrightarrow V_{X_2} \models \exists x \varphi(x). \text{ " } \omega \text{ is } x \text{ " } \equiv \varphi(x) : \omega \in S$$

$$S \models \omega^S = \omega \Leftrightarrow V_{X_2} \models \varphi(\omega) \text{ for } \omega$$

$$\dots, \omega + \omega, \dots, \omega + 2, \omega + 4 \in S \Leftrightarrow$$

$$X_2 \in S \text{ is a limit ordinal.}$$

$$S \models f: \omega \rightarrow \alpha \text{ for}$$

$$(S \models f: \omega \rightarrow \alpha) \text{ for } \alpha \in S \text{ (by } V_{X_2} \models \varphi(a_1, \dots) \text{ for } a_i \in S \text{)}$$

$$(S \models f: \omega \rightarrow \alpha) \text{ for } \alpha \in S \text{ and } n \in \omega \Leftrightarrow \beta \in V_{X_2}$$

$$S \cap X_2 \neq X_2 \Leftrightarrow S \models \alpha \in S \text{ for } \alpha \in S \cap X_2$$

$$S \cap X_2 \models \beta < \alpha \in S \cap X_2 \text{ (by } V_{X_2} \models \varphi(a_1, \dots) \text{ for } a_i \in S \text{)}$$

$$V_{X_2} \models f: \omega \rightarrow \alpha \text{ for } \alpha \in S \cap X_2$$

$$- X_2$$

$$S \models \exists x \varphi(x) \Leftrightarrow S \models \varphi(\omega^S)$$

$$\delta := S \cap X_2$$

$$\delta \models \varphi \text{ for } \varphi \in S$$

Let $M \models \delta = X_2$ for $M \models S$ and $M \models \delta = X_2$ for $M \models S$ and $M \models \delta = X_2$ for $M \models S$

($f: \omega \rightarrow \beta$ for $M \models \beta < \delta$, $f: \omega \rightarrow \delta$ for $M \models \delta = X_2$)

* Let $M \models \delta = X_2$ for $M \models S$ and $M \models \delta = X_2$ for $M \models S$

$$= \text{מכאן} =$$

כאשר $\kappa < \aleph_0$ ויש $f \in \mathcal{U}$ כזה ש- $\text{rank}(f) = \kappa$. (זוהי $\mathcal{U}$).

$$V^\kappa := \{f \in \mathcal{U} : \text{rank}(f) \leq \kappa\} \quad ; \quad \forall \kappa < \aleph_0 \rightarrow A \in \mathcal{U}$$

Jensen: אם κ הוא מספר גודל, $\aleph_\alpha < 2^{\aleph_\alpha}$ אז $\aleph_{\alpha+1} < 2^{\aleph_\alpha}$ ויש $f \in \mathcal{U}$ כזה ש- $\text{rank}(f) = \aleph_{\alpha+1}$.

* וזהו $\mathcal{U}$ כזה

$$V^\kappa := \{f \in \mathcal{U} : \text{rank}(f) \leq \kappa\} \quad *$$

$$\{ \alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha) \} \in \mathcal{U} : f =^* g$$

$$\{ \alpha < \kappa : f(\alpha) \in g(\alpha) \} \in \mathcal{U} : f \in^* g$$

* $[f] = \{g : g =^* f\}$ מחלקת f של $\mathcal{U}$. נניח $f \in \mathcal{U}$ אז $[f] = \{g : \text{rank}(g) \text{ is minimal with } g =^* f\}$ (זוהי $[f]$).

(אילו היה $\mathcal{U}$ סגור תחת $\cap$, אז V היה $\mathcal{U}$).

$$V \text{ על } \mathcal{U} \text{ ו-} V^\kappa/\mathcal{U} := \{[f] : f \in V^\kappa\}$$

$[f] \in [g] : f \in^* g$ (זהו $\mathcal{U}$); $\mathcal{U}$ סגור תחת $\cap$; $\mathcal{U}$ סגור תחת $\cup$.

זוהי $(M, \in)$ ויש $\mathcal{U}$ (זהו $\mathcal{U}$).

* זהו $\mathcal{U}$ (זהו $\mathcal{U}$).

$$\{ \alpha : \varphi(f_\alpha(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) \in \mathcal{U} \} \Leftrightarrow V^\kappa \models \varphi([f_1], \dots, [f_n]) \text{ וזה } \varphi \text{ וזה } \varphi$$

זהו $\mathcal{U}$ (זהו $\mathcal{U}$).

$$V \models \varphi \Leftrightarrow V^\kappa/\mathcal{U} \models \varphi \text{ אז } \varphi \text{ זהו } \varphi$$

זוהי $\mathcal{U}$ (זהו $\mathcal{U}$).

$$V^\kappa/\mathcal{U} \models \varphi([a_1], \dots, [a_n]) \Leftrightarrow V \models \varphi(a_1, \dots, a_n) : a_i \in V \text{ וזה } \varphi$$

(זהו $\mathcal{U}$)

$$(V, \epsilon) \xrightarrow{j} (V^k/U, \epsilon) \xrightarrow{\pi} (M, \epsilon)$$

*

$$V \rightarrow M \text{ is a } \pi \text{-isomorphism, } \epsilon := \pi \circ j$$

$$i(\alpha) = \alpha, \alpha < \kappa \text{ } \square \text{ } i(\alpha) = j(\alpha) \text{ } \square \text{ } j(\alpha) = \alpha$$

$$\alpha \leq i(\alpha), \alpha \in \text{Ord}(\kappa)$$

$$\kappa < i(\kappa) \quad (3)$$

(1.2)

$$\alpha < \kappa \text{ } \square \text{ } j(\alpha) = \alpha$$

$$\text{if } \alpha < \kappa \text{ then } j(\alpha) = \alpha \text{ } \square \text{ } j(\alpha) = \alpha \text{ } \square \text{ } j(\alpha) = \alpha$$

$$\Rightarrow i(\alpha) = \{ \pi([C_\delta]) : \delta < \alpha \} = \{ \pi(j(\delta)) : \delta < \alpha \} \stackrel{\text{I.H.}}{=} \{ \delta : \delta < \alpha \} = \alpha$$

$$\alpha \leq i(\alpha) \iff (i(\beta) < i(\alpha) \iff \beta < \alpha) \text{ } \square \text{ } (V, \pi) \text{ } \square \text{ } i(\alpha) \text{ } \square \text{ } M \models i(\alpha) \text{ } \square \text{ } j(\alpha) \text{ } \square \text{ } j(\alpha) = \alpha$$

$$\kappa \leq i(\text{id}) < i(\kappa) \iff \alpha < \kappa \text{ } \square \text{ } [C_\alpha] \in [C_\kappa] \text{ } \square \text{ } \kappa \leq i(\kappa) \quad (3)$$

$$\alpha = i(\text{id}) < i(\kappa)$$

= השאלה =

השאלה: יהי Z מחלקה כך $Z = \bigcup_{\alpha \in ON} Z_\alpha$ איחוד חלקה של ω ; ויהיו $\varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_n(\bar{x})$ נוסחאות.
 שם: לכל α ו- β $\alpha < \beta$, $Z_\alpha \cap Z_\beta = \emptyset$.

(*) לכל φ_i $1 \leq i \leq n$; $a_1, \dots, a_n \in Z_\gamma$:
 $Z_\beta \models \varphi_i(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow Z_\gamma \models \varphi_i(a_1, \dots, a_n)$

השאלה: φ נוסחה (גורם) אם היא מתקיימת

(1) $x=y$ או $x \in y$ (נוסחה אטומית); כא

(2) $\varphi_1 \vee \varphi_2, \varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_1 \rightarrow \varphi_2, \neg \varphi_1$ כאשר φ_1, φ_2 נוסחאות; כא

(3) $\exists x \varphi, \forall x \varphi$ כאשר φ נוסחה.

* אגור קוסטמן בנוסחאות לגורמים בלבד $\exists x, \neg, \wedge$ בלבד (כל נוסחה שקולה לזו).

* מחלקה תופשית: נוסחה φ הוא כזה שאינו מכונה. אם אין, נוסחה סגורה.

* מחלקה (קבוצה של גורמים) הוא מחלקה M אם יש E (בנייה) $M \models E$.

* קבוצה נוסחה φ , אם $M \models \varphi$ נכונה כאשר מחלקים "Vx" כ"ל $x \in M$, "Mx" כ"ל $x \in M$.

" $\exists x$ " כ"ל "יש x ב-M", " $\forall x$ " כ"ל "לכל x ב-M".

* בדיקת E הוא יחס השליכות, ומסומן $\in$ ככזה; וכן גורמים אם לא נאמר אחרת.

השאלה: יהיו נוסחה $\varphi(x_1, \dots, x_n)$; $M_1 \subseteq M_2$ מחלקים.

φ נוסחה φ עבור M_1, M_2 אם:

לכל $a_1, \dots, a_n \in M_1$: $M_1 \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow M_2 \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$

M_1 גורם-מחלקה של M_2 , אם $M_1 \subseteq M_2$, $M_1 \models \varphi \Leftrightarrow M_2 \models \varphi$ לכל נוסחאות φ שגורם-מחלקה של M_1, M_2 .

2.13: $x=y$ נוסחה של M_1, M_2 אם $x \in y$ ו- $x=y$ נוסחה של M_1, M_2 (כל $x \in y$).

* $x=y$ (כלומר: $\forall a (a \in x \rightarrow a \in y)$) לא גורם-מחלקה: $M_1 = \{1, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$, $M_2 = V$.

$M_1 \models \forall a (a \in \{1, 2\} \rightarrow a \in \{1, 3\})$, $M_2 \models \{1, 2\} \subseteq \{1, 3\}$ (אכן), $M_1 \models \{1, 2\} \subseteq \{1, 3\}$ (אכן).

* $x \neq y$ נוסחה של M_1, M_2 אם $x \neq y$ ו- $x \neq y$ נוסחה של M_1, M_2 (כל $x \neq y$).

* α גורם-מחלקה של β אם $\alpha \subseteq \beta$ ו- $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \beta$ נוסחה של M_1, M_2 אם $\alpha \neq \beta$.

- 7 -

2) $\text{Kanal mit } Z = \bigcup_{\alpha \in \Omega} Z_\alpha$, mit $\Omega = \varphi_1 \dots \varphi_n$ ist: fixes gew. Kanal mit
 Z_α, Z mit allein $\varphi_1 \dots \varphi_n$ $\text{es } \alpha < \beta \text{ ist } \alpha \text{ ist}$

נוסחה : יהיו $M_1 \subseteq M_2$ מודלים $\varphi_1 \dots \varphi_n$ של Σ ונניח שכל φ_i נכונה ב- M_1 .
 אז $M_2 \models \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$.
 (Tarski-Vaught Criterion)
 (א) לכל נוסחה $\varphi(x, \bar{a})$ שבה x היא נקודה פתוחה ו- $\bar{a}$ הוא סדרה של קבועים, אם $M_1 \models \exists x \varphi(x, \bar{a})$ אז $M_2 \models \varphi(b, \bar{a})$ עבור $b \in M_1$.
 אז $M_1 \equiv M_2$ (כלומר M_1 ו- M_2 הם מודלים של אותה תורת פורמלית).

(בדיקת התנ"י היא ב M_2 , ואם נח בלבדונים את M_2 בתוך M_2 (למשל).

[illegible]

הוכחה מלבד התקפות: הרי"כ הרגילה $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ סגורה למען נוסחאות. נכון α .
נמצא $\beta < \alpha$ כן למען "ה" הרגילה לנסות-ואל.

$$G_c(a_1 \dots a_k) = \begin{cases} \min\{x : \exists b \in \mathbb{Z}_x, x \mid \Psi(b, \bar{a})\} & \text{if } Z \neq \emptyset, \varphi_i = \exists y \psi(y, \bar{x}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\beta = \sup \{ \alpha_n \}; \alpha_{n+1} = \max \{ \sup G_1[Z_{\alpha_n}^k], \dots, \sup G_n[Z_{\alpha_n}^k] \}; \alpha_0 = \alpha + 1 \text{ (כך ע)$
 נגד הוכחה של אורסקול

מנגנון: $\chi''(1)$ מן χ'' וקט' N ZFC, α כן χ'' V_α מן V_α חזרה.

(2) ω_{α} הולך ל-0 ככל ש- α הולך ל- ∞ : אומר כי $\alpha \rightarrow \infty$ $\omega_{\alpha} \rightarrow 0$

ורגיליו הוכחה $ZFC \nvdash Con(ZFC)$. $Con(ZFC) \vdash ZFC$ (Gödel) $ZFC \nvdash Con(ZFC)$

$(2 + 1) \mu$. ZFC $\rightarrow$ μ 35 (1.0) μ c (3)

[illegible]
$$(S \vdash \text{Con}(S) \Leftrightarrow S \vdash \exists x V_x S \Leftrightarrow S \vdash V \neq S \quad \text{ja! also } S \vdash V = \bigcup_x V_x \text{ oder } S \vdash S \neq V, \text{ nicht so schlimm})$$

לנוכח-סדר הנידב: $X \subseteq M \subseteq Z$ ו' $|M| = |X| + N_x$, כך y_1, y_n מונחה אל M , Z (אלה בנפרד)
 (על אלה y_1, y_n פגאנר $\in M$ וכן (אל X כנגדי עיני) קבלו פגור M על $C(X)$ עיני).

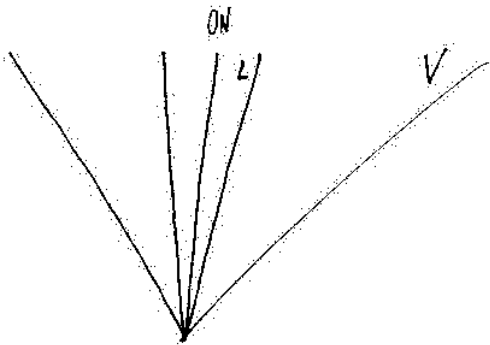
= עולם הרב הפניות של Gödel -
 פונקציה: דוגמה לבניית V , אין באנום לומר את סדרת החזרה, לוקחים את העניינים הרבתי.

* Y עצירה ב X אם יש נוסחה $\varphi(\vec{a}, u)$ ופרמטרים $\vec{a} \in X$ כך ש
 $Y = \{b \in X : X \models \varphi(\vec{a}, b)\}$

* $Def(X) := \{Y \subseteq X : X \text{ עצירה ב } Y\}$

אם ניקח את V כגוף הכולל "יש נוסחה" נראה פהרון אלו"כ.

*
$$L = \bigcup_{\alpha \in ON} L_\alpha \quad ; \quad \begin{cases} L_0 = \emptyset \\ L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha) \\ L_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} L_\beta \quad (\alpha \text{ לימני}) \end{cases}$$



* (1) לכל α , L_α רבי לניסיון ידוע.

(2) $L_\alpha \subseteq L_\beta \leftarrow \alpha < \beta$

(3) $L_\alpha \in L_\beta \leftarrow \alpha < \beta$

(4) $\alpha \in L_\alpha$

(5) לכל n , $L_n = V_n$; $L_\omega = V_\omega$

הוכחה: אינדיקציה.

* AC $\leftarrow$ (a) $|L_\alpha| = |\alpha|$ ($\forall \alpha \geq \omega$) (b) $|Def(A)| = |A|$ לכל אובייקט A .

גולד (Gödel): $L \models AC$, לכן יש בו בחירה כוללת. $L \models AC$ (אם $L \models AC$ אז $L \models AC$).
 א. באינדוקציה על α , נגדיר סדר Δ_α על L_α כך לכל $\beta < \alpha$, $\Delta_\beta = \Delta_\alpha \restriction L_\beta$.
 ב. $\Delta_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \Delta_\beta$: אובייקט α

L

היה $x, y \in L$: אם $rank(x) < rank(y)$ אז $x \Delta y$ (rank(x) = min{ $\alpha : x \in L_{\alpha+1}$ })

אם $rank(x) = rank(y) = \alpha$ אז $x, y \in L_{\alpha+1} \setminus L_\alpha$ ויש $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in L_\alpha$ ופרמטרים $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in L_\alpha$ והמשקל x, y נבדלים

! $(\vec{a}_1, \vec{a}_2) < (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ בסדר הניסיון (הניסיון-לפי הניסיון) L_α - בנייה.

Model of AC.

$$Con(ZF) \rightarrow Con(ZFC) \quad : \text{הוכחה}$$

$$\begin{aligned} \exists x R(\bar{x}, x) &\leftrightarrow Proj(A^n, R) = \{s \in A^n : (\exists t \in R) \#n = s\} : \text{הוכחה } Def(A) \text{ זכור } * \\ x_i \in x_j &\leftrightarrow Diag_e(A^n, i, j) = \{s \in A^n : s(i) \in s(j)\} \\ x_i = x_j &\leftrightarrow Diag_= (A^n, i, j) = \{s \in A^n : s(i) = s(j)\} \end{aligned}$$

: הוכחה, n - מספר טבעי, k - מספר טבעי

$$D_0(A^n) = \{Diag_e(A^n, i, j) : i, j < n\} \cup \{Diag_= (A^n, i, j) : i, j < n\}$$

$$\begin{aligned} D_{k+1}(A^n) = & D_k(A^n) \cup \\ & \cup \{A^n \setminus R : R \in D_k(A^n)\} \\ & \cup \{R \cap S : R, S \in D_k(A^n)\} \\ & \cup \{Proj(A^n, R) : R \in D_k(A^n)\}. \end{aligned}$$

$$D(A^n) := \bigcup_k D_k(A^n).$$

$$\begin{aligned} D(A^{n+1}) \ni R &\mapsto Proj(A^n, R) \quad \text{הוכחה, תהליך סופי, (הוכחה)} \quad * (1) \\ \forall A : \{s \in A^n : A \models \varphi(s)\} &\in D(A^n) \quad \text{הוכחה } \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ נוסחה} \\ &\quad \text{הוכחה } \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ נוסחה (ובו-מספר טבעי } n), \text{ הוכחה } (1) \end{aligned}$$

$$\widetilde{Def}(A) = \{X \subseteq A : \exists n \exists s \in A^n \exists R \in D(A^{n+1}), X = \{x \in A : s \wedge x \in R\}\} *$$

הוכחה "φ(s, x)"

$$: a_1, \dots, a_n \in A \text{ נוסחה } A \models \varphi(a_1, \dots, a_n, x) \text{ הוכחה} *$$

$$\{b \in A : A \models \varphi(a_1, \dots, a_n, b)\} \in \widetilde{Def}(A)$$

(הוכחה) $(a_1, \dots, a_n, b) \in R$

$$\widetilde{Def}(A) = Def(A) \quad \text{הוכחה } Def(A) \text{ הוכחה } *$$

הוכחה, וזו מספר טבעי n הוכחה.

$$Def \text{ הוכחה, } L \text{ הוכחה} *$$

$$= \text{קואסטרקציה (הכללה)}$$

הגדרה: $\text{Def}(X) =$ קואסטרקציה של X (קואסטרקציה של X היא קואסטרקציה של X).

$$L_0 = \emptyset, L_{\alpha+1} = \text{Def}(L_\alpha), L_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} L_\alpha; L = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} L_\alpha$$

קואסטרקציה של ϕ היא קואסטרקציה של ϕ (קואסטרקציה של ϕ היא קואסטרקציה של ϕ).

קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f (קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f).

($x \in M$ אם $f(x) = f(x)$ אם f קואסטרקציה של f).

קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f .

קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f (קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f).

קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f (קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f).

קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f (קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f).

קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f (קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f).

$$\text{rank}(x) = \min\{\alpha : x \in V_\alpha\}; \rho(x) = \min\{\alpha : x \in L_\alpha\}$$

קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f (קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f).

$$V = L \rightarrow AC$$

קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f (קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f).

קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f (קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f).

קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f (קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f).

קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f (קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f).

קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f (קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f).

קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f (קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f).

קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f (קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f).

קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f (קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f).

קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f (קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f).

קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f (קואסטרקציה של f היא קואסטרקציה של f).

היגיון - אבסורדיות (L) : $L \models ZF$

יציאות -

זיג, איחוד, החלפה, חזרה : ρ גודל מספר עוצמה.

חזרה : ρ גודל $X \in L$: $P^L(X) = \{Y \in L : Y \subseteq X \wedge Y \in L\}$. $\alpha = \sup \{ \rho(Y) : Y \in P(X) \}$. $\rho^L(X) \in L$, $\rho^L(X) \leq \rho(X)$.

חזרה : יציאות ρ גודל $X, \bar{a} \in L$: $\{b \in X : \varphi^L(\bar{a}, b)\} \in L$.

נניח α גודל $X, \bar{a} \in L$, $\alpha < \beta$ ו φ אבסורדיות L, L_p .

$$\{b \in X : \varphi^L(\bar{a}, b)\} \stackrel{L}{=} \{b \in L_p : b \in X \wedge \varphi^L(\bar{a}, b)\} \stackrel{L}{=} \{b \in L_p : \underbrace{b \in X \wedge \varphi^L(\bar{a}, b)}_{L_p \models b \in X \wedge \varphi(\bar{a}, b)}\} \in L_p \subseteq L.$$

אם $V = L$: $(\forall x)(\exists \alpha) x \in L_\alpha$.

מלכ : $V = L \rightarrow AC$. (הוכחה בסוף פרק 11)

מלכ : $L \models V = L$

נניח $x \in L$, α גודל x , $L \models \forall x \exists \alpha x \in L_\alpha$, $\exists x \in L \exists \alpha (x \in L_\alpha \wedge \alpha \notin L)$.
 נניח α גודל x , $x \in L_\alpha$, $\alpha \notin L$.
 $\parallel (x \in L_\alpha)^L$, $\alpha \in L_\alpha$.

מלכ : $L \models ZFC$

$\text{Con}(ZF) \rightarrow \text{Con}(ZF+V=L)$, $\text{Con}(ZF) \rightarrow \text{Con}(ZFC)$.

מרחב הוויבר

מרחב M מרחב הוויבר $(ZF \setminus P)^*$

(1) אם M מרחב הוויבר M , אז $L^M = L$ (באופן $\{x : (x \in L)^M\}$, כוונתו) , $M \supseteq L$.

(2) אם M מרחב הוויבר , אז $L^M = L_{ON \cap M}$.

ה $\alpha \in L_\alpha$ אבסורדיות

(1) $M \supseteq \alpha \iff M \supseteq \text{rank}(\alpha) \iff \alpha \in M$, $\alpha \in M \iff M \not\subseteq V_\alpha$, $\alpha \in M \iff M \not\subseteq V_\alpha$.

(2) $M \models ZF \setminus P \iff$ אין סדר מירב $\alpha = ON \cap M \iff L_\alpha = \bigcup_{\beta \in M} L_\beta \iff L^M = L$.

כפיה היא שיהיה להרחיב מורה חיים.

הגיאומטריה כזו היא יציבה ZFC, אחת הדרכים אחרות זאת:

מחזורי חיים-מוות, ומה שחלף לא חוזר, וכל מה שחלף לא חוזר, וכל מה שחלף לא חוזר.

4. ZFC* + CH is BNS

(המחבר) ב"מ (לאס) המרחבה א"ה מ"ו ז"ל (ZFC).

$\mathcal{P}$ and $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}$ (2)

$$\text{so let } M \text{ be } \sqrt[n]{p} \text{ over } K \text{ and } G \subseteq P. (P, \leq, 1) \in \text{Mk}(\mathcal{L}) \quad \text{so let } \text{Jon}$$

($\mathbb{1} = \emptyset$) $f \leq g \iff g \subseteq f$ $C = \{f \mid f: \omega \rightarrow 2\}$: ω $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$

$$\text{dom}(F) = \omega \iff \exists \alpha \exists \beta \quad D_\alpha = \{\beta \in C : \beta \in \text{dom}(f)\} \neq \emptyset \quad (5)$$

$F \notin M$!, and in $F = UG: \omega \rightarrow 2$ sk, M is not a G sk: 2/20/08

אם $p \in P$ ו- $r, f \leq p$ אז $r, f \leq p$ ולכן $r, f \leq p$.

✓ $G \neq \emptyset$ וצבור $M \ni P \setminus G$ ו $r, p \in \mathbb{R}$ ו r, p אינן מ"ל'ים אין אמות זהו אמת $\neq G$

$p \in G$ אם $M \models \neg \exists x \neg \varphi$ G ו- $p \in P$ ו- $n^o (P, \leq, 1) \in M$; ZFC ב- $\mathcal{L}_{\geq}$ Γ_M ו- G ו- M

ה. מספר את הקבוצה המצומצמת P ולייבול $M, D_2, D_3, \dots, D_n$

$$\parallel \{p_n: \text{new}\} \text{ is a } \mathbb{Q}\text{-basis for } G \text{ if } \dots \leq \underbrace{p_2}_{D_2} \leq \underbrace{p_1}_{D_1} \leq p_0 = p$$

* מעניינים את אלוסוף גם M ו- G בצורה של M על M ו- M על M ו- M על M .

פסל אבן ב $M[G]$ יהיה למ M לעמוד האמור חלוקה

אל: $\sigma \in P, p \in P, (\sigma, p)$ הוא נגזרת של $(\text{אל}-P)$

$$V(\mathcal{N} \text{ sub-} P \text{ on } \mathcal{N}) \cap V^P = \bigcup_{\alpha \in ON} N_\alpha ; \begin{cases} N_0 = \{\emptyset\} \\ N_{\alpha+1} = P(N_\alpha \times P) \\ N_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} N_\beta \quad (\text{if } \alpha \text{ is limit}) \end{cases}$$

מנהל מ"מ: "חלום" מגדיר בין היתר את שני הערכים הבסיסיים שלו.

$$M^P := V^P \cap M = \{ \tau \in M : \omega \vdash \tau \} \therefore$$

$$\tau_G := \{ \sigma_G : (\exists p \in G) \langle \sigma, p \rangle \in \tau \} \quad \tau \in M^P; \quad M \models \neg \text{``} \exists p \in G \text{ } \langle \sigma, p \rangle \in \tau \text{''} \quad \text{iff} \quad \sigma \in \tau_G$$

* $\theta_2 \rightarrow \theta_1$ is not.

1. [הרמת בסיס (רשימה) : $M[G] = \{ \tau_G : \tau \in M^P \}$, $M[G](1) \models \varphi \iff M^P \models \varphi$ (כ"י) $M^P \in M$ ב"נ

$$(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \cong M[G](2)$$

למשל: $M' = \{G \mid G \subseteq M, G \in \mathcal{G}\}$ ו- $M[G] \subseteq M'$, $G \in M'$! $M \subseteq M'$ ו- ZFC נכון ב- M' (למשל).

[illegible]

213: $\phi_G = \emptyset$ ברנרסטיג, $a \in M$ של מרחב $\check{A} = \{(b, 1) : b \in a\}$

$$\check{a}_G = a$$

$$\Gamma_G = G \quad \Gamma := \{(\check{\varphi}, \rho) : \rho \in \mathbb{P}\} : G \text{ nicht injektiv}$$

* הרחבה ענין המעלות (מסלול 44 ו'43).

• $M \cap ON = M[G] \cap ON$: (المركب 3.3)؛

2. (5) 2.1

$$\alpha \in M \leftarrow \exists! M, \alpha = \text{rank}(\alpha) = \text{rank}(\tau_\alpha) \leq \text{rank}(\tau) \in M, \tau \text{ s.t. } \alpha \in M[G] \text{ s.t. } (\cong)$$

$M[G] \models ZFC : \text{not } \underline{N}$

$M[G]$ וְ N : $\mathcal{M}[G] \models \varphi$ + φ נכון

$$\{(\sigma, 1), (\tau, 1)\}_c = \{\sigma_c, \tau_c\} \quad \text{in } \mathcal{A} \quad \square$$

$$(V \text{ dom}(\tau))_G \supseteq V(\tau_G) \quad : 3) \text{ n.k. } \triangle$$

* צדור לחדר האוכל - (צ"ל) הרמת את המלאך כפיה / מאחורי.

בפרק 1: יהיו $\varphi(u_1 \dots u_n)$ וחסמה $\sigma_1 \dots \sigma_n \in M^P$.

$$M[G] \models \varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_n), M \text{ ist } \sigma_j \text{ ist } \underline{p} \in G \text{ ist } \boxed{p \Vdash \varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}$$

... *

הצגת פונקציה: $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ נוסחה $\{\varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_n) : \rho(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in M\}$ (המילה $G \models M$)

13: C - כפ"ם כדן ; G - C (כפ"ם) ; $F = UG$; J (כדן) U ; F ו U F .

$$\varphi \equiv \tilde{F}(\vec{r}) = \vec{0} \Rightarrow \{(\vec{0}, 0)\} \not\subseteq \varphi, \{(\vec{0}, 0)\} \not\subseteq \varphi, \{(\vec{0}, 0)\} \Vdash \tilde{F}(\vec{0}) = \vec{0}$$

* ימך זמ אלמ העצירתי לאכילת :

למשל $f \leq p \Vdash \varphi \leftarrow f \Vdash \varphi$ (למשל)

(.عزل "=>") . $p \Vdash \varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ و $p \in G$ و $q \in G'$ $\Leftrightarrow M[G] \models \varphi((\sigma_1)_G, \dots, (\sigma_n)_G)$: الملك

* עליון ה'למאד לאבית פ"ה עז יום * H^{*} מ M.

היחס $\models^*$ (Satisfiability) : $\models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\}$ (Boolean value).

$$1. \models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\} \quad \text{כאשר} \quad \models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\}$$

$$(2) \models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\} \quad \text{כאשר} \quad \models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\}$$

$$\models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\} \quad \text{כאשר} \quad \models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\}$$

$$(3) \models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\} \quad \text{כאשר} \quad \models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\}$$

(כאשר p ו- q הם צורות בוליות)
(כאשר p ו- q הם צורות בוליות)
(כאשר p ו- q הם צורות בוליות)

$$2. \models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\} \quad \text{כאשר} \quad \models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\}$$

$$(2) \models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\} \quad \text{כאשר} \quad \models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\}$$

$$(2) - (1) \text{ הוכחה}$$

היחס $\models^*$ מוגדר על ידי הכללים הבאים, והוא תלוי.

הכלל 1: $\models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\}$

הכלל 2: $\models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\}$

$$\models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\} \quad \text{כאשר} \quad \models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\}$$

$$\models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\} \quad \text{כאשר} \quad \models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\}$$

$$\models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\} \quad \text{כאשר} \quad \models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\}$$

$$\models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\} \quad \text{כאשר} \quad \models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\}$$

$$\models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\} \quad \text{כאשר} \quad \models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\}$$

$$\models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\} \quad \text{כאשר} \quad \models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\}$$

$$\models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\} \quad \text{כאשר} \quad \models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\}$$

$$M \models D := \{f \in P : f \models^* \varphi \vee f \models^* \neg \varphi\}$$

$$\models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\} \quad \text{כאשר} \quad \models^* : \text{צורה} \times \text{גרף} \rightarrow \{0,1\}$$

$$= M[G] \models ZFC =$$

$p \Vdash \varphi$ ו $p \in G$ ו $\Leftrightarrow M[G] \models \varphi$; M ו $\exists z \in H$ רצף

$$M[G] \models ZFC \quad \text{בולט}$$

ה τ (רצף), σ (רצף), σ (רצף)

$$A = \{ a \in \tau_G : M[G] \models \varphi(\tau_G, \sigma_G, a) \} \quad \text{רצף}$$

מ $(M[G], \tau_G, \sigma_G)$

$$p = \{ (\sigma, \rho) \in \text{dom}(\tau) \times P : p \Vdash \sigma \in \tau \wedge \varphi(\sigma) \} \quad \text{נ"י}$$

$$\sigma_G = a \quad \text{אם} \quad \sigma \in \text{dom}(\tau) \quad \text{ו} \quad a \in \tau_G \quad \text{אם} \quad a \in A \quad (\Leftrightarrow)$$

$$p \Vdash \varphi(\sigma) \wedge \sigma \in \tau, p \in G \quad \text{ו} \quad : M[G] \models \varphi(a) \wedge a = \sigma_G \in \tau_G$$

$$a = \sigma_G \in p_G \Leftrightarrow p \in G, (\sigma, \rho) \in p \quad \therefore$$

$$; \sigma_G = a, (\sigma, \rho) \in p, p \in G \quad \text{ו} \quad a \in p_G \quad (\Rightarrow)$$

$$\text{אם} \quad a \in A \quad \Leftrightarrow M[G] \models a \in \tau_G \wedge \varphi(a) \Leftrightarrow p \Vdash \sigma \in \tau \wedge \varphi(\sigma)$$

$$M[G] \models \forall u \in \tau_G \exists! v \varphi(u, v) \quad \text{ו} \quad \tau_G \in M[G], (\text{רצף} \text{ אף}) \quad \varphi(u, v) \quad \text{נ"י}$$

"im φ " τ_G τ_G

$$F(\sigma, \rho) := \begin{cases} \min\{\alpha : \exists \text{ name } v \in V_\alpha, p \Vdash \varphi(\sigma, v)\} & \text{if } \neq \emptyset \\ 0 & \text{if } = \emptyset \end{cases} \quad \text{rank}$$

$$M^P \ni p := \{ (v, \rho) \in (M^P \cap V_\alpha) \times P : \exists \sigma \in \text{dom}(\tau), p \Vdash \varphi(\sigma, v) \} ; \text{im } F \leq \alpha^* \quad \text{נ"י}$$

$$\varphi(a, b) \quad \text{אם} \quad b \in p_G \quad \text{ו} \quad a \in \tau_G \quad \text{נ"י}$$

$$\varphi(a, v) \quad \text{אם} \quad v \in \tau_G \quad \text{ו} \quad M[G] \models (\exists \sigma \in \text{dom}(\tau), \sigma_G = a) \quad \text{ו}$$

$$p \Vdash \varphi(\sigma, v), p \in G$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists \sigma \in \text{dom}(\tau), \sigma_G = a$$

$$\text{rank}(v) \leq \alpha^* \quad \text{נ"י} \quad \text{ו} \quad \text{rank}(v) \leq \alpha^*$$

$$\text{אם} \quad v \in p_G \quad \Leftrightarrow p \in G, (v, \rho) \in p \Leftrightarrow$$

$$\text{אם} \quad \omega = \check{\omega}_G \in M[G] : \check{\omega}_G \in \tau_G$$

$v_G \in \sigma_G, v_G \subseteq \tau_G \text{ ולכן } \sigma_G \text{ ו- } \tau_G \text{ הם } \sigma \text{ ו- } \tau$

$$\sigma = \{ p \in M^P : \text{dom}(p) \subseteq \text{dom}(\tau) \} \times \{1\} \quad \text{הגדרה}$$

$$\pi_G \in \sigma_G \Leftrightarrow (\pi, 1) \in \sigma \Leftrightarrow \pi := \{ (\mu, p) \in \text{dom}(\tau) \times P : p \Vdash \mu \in v, v_G \subseteq \tau_G \text{ ו- } \mu \Vdash \mu \in v \}$$

$$p \Vdash \mu \in v, (p \Vdash \mu \in v) \Leftrightarrow \mu_G = b, (\mu, p) \in \tau, p \in G \Leftrightarrow b \in v_G(\subseteq \tau_G) \quad (2)$$

$$p \Vdash \mu \in v \Leftrightarrow (\mu, p) \in \tau \Leftrightarrow \mu_G \in \pi_G$$

$$b = \mu_G \in v_G \Leftrightarrow p \Vdash \mu \in v, \mu_G = b, p \in G, \mu \in \text{dom}(\tau) \Leftrightarrow b \in \pi_G \quad (3) \text{ (המשפט)}$$

הוכחה: σ_G ו- τ_G הם σ ו- τ
 $M \ni \text{dom}(\tau) = \{ \sigma_\alpha : \alpha < \beta \}$ ו- $M \ni$

$$(op(a, b)_G = (a_G, b_G) \text{ ו- } \gamma) \quad v := \{ op(\check{\alpha}, \sigma_\alpha) : \alpha < \beta \} \times \{1\} \in M^P$$

$$v_G = \{ (\alpha, (\sigma_\alpha)_G) : \alpha < \beta \}$$

$$\tau_G \subseteq \{ (\sigma_\alpha)_G : \alpha < \beta \} \quad \text{ולכן } \tau_G \subseteq v_G$$

$$(Con(ZFC) \text{ ו- } V=L) \text{ ו- } ZFC + V=L \text{ ו- } V \neq L$$

$$(Con(ZFC) \text{ ו- } V \neq L) \text{ ו- } Con(ZFC + V \neq L)$$

$$G \notin M \text{ ו- } P \in M, M \models ZFC$$

$$M = M[G] \Leftrightarrow L_{M \cap ON} \subseteq M \subseteq M[G] = L_{M[G] \cap ON} \text{ ו- } M[G] \models V=L \text{ ו- } M[G] \models ZFC$$

$$V \neq L \text{ ו- } V=L \text{ ו- } V \neq L$$

- Getting $\neg CH$ -

$C_k := \{f: k \times \omega \rightarrow 2 \mid |f| < \aleph_0\}$ מונח $\aleph_0 \leq k \in M$ כפי ש- k ו- ω כפי ש-

אם $G \in C_k$ זוגית מן M , אז $F := UG: k \times \omega \rightarrow 2$ זוגי למעלה.
 לכל $\alpha < k$, $2^\omega \ni f_\alpha(n) := F(\alpha, n)$, והפונקציה f_α נקראת $D_{\alpha, \beta} = \{f \in C_k: \exists n (f(n) = \alpha + \beta)\}$.

$\therefore M[G] \models |A| \leq 2^{\aleph_0}$ לכל מונח A מן M .

הקולט $Col(\omega, \kappa) := \{f: \omega \rightarrow \kappa \mid |f| < \aleph_0\}$.

אם G זוגית, אז $F := UG: \omega \rightarrow \kappa$ זוגי למעלה.
 $M[G] \models |A| = \aleph_0 \iff \exists f \in Col(\omega, \kappa) \text{ s.t. } f \in G$

מקסימום $A \subseteq P$ כך שכל איבר ב- P אינו מתחתיו.

מקסימום (ccc): כל איבר הוא ב"ח.

מקסימום: לכל A , C_k הוא ccc.

ה. בקצרה:

למשפט 1: יהי A משפחה של ב"ח רג' סופית. אז $\tilde{A} \subseteq A$ היא ב"ח.
 (המשפט 1 הוא: $(a \cap b = r: a, b \in A)$ שכל r הוא ב"ח).

ה. 1. נניח A כך שכל $|A| = \aleph_2 \iff |UA| \leq \aleph_2 \iff \tilde{A} \subseteq X_2$.

2. $\tilde{A} \subseteq [X_2]^\omega \iff A = \bigcup_n A \cap [X_2]^n$.

נניח A הוא משפחה סופית של ב"ח. $n=1$: לכל $a \in A$.

$n > 1$: לכל $a \in A$ נחשב $\min a$.

מקרה I: יש α כך ש- $\min a = \alpha$ לכל $a \in A$.

נניח A הוא משפחה סופית של ב"ח, ונניח α הוא המינימום (עבור $n=1$).

מקרה II: לכל $\alpha < \aleph_2$ יש $a \in A$ ש- $\min a = \alpha$.

נניח $\alpha_0 = \min a_0, \alpha_1 = \min a_1, \dots$

נניח $\tilde{A} := \{a_\beta: \beta < \aleph_2\}$ ש- $\sup\{\alpha_\beta: \beta < \aleph_2\} = \min\{\alpha_\beta: \beta < \aleph_2\}$.

אם $\alpha < \beta < \aleph_2$ אז $a_\alpha \cap a_\beta = \alpha$ ולכן $a_\alpha \in \tilde{A}$ ו- $a_\beta \in \tilde{A}$.

r օրինակ, $I \in \mathcal{X}_1, \{a_\alpha : \alpha \in I\} \Delta$ -փակ է $\Leftarrow$
 $f_\alpha|_r = f_\beta|_r$, $\alpha, \beta \in \tilde{I}$ օրինակ $\mathcal{X}_1$ օրինակ $\tilde{I} \subseteq I$ օրինակ, $r \rightarrow 2$ օրինակ օրինակ օրինակ
 $\Downarrow$ (օրինակ օրինակ $\text{dom } f_\alpha \cap \text{dom } f_\beta = r$) $\alpha, \beta \in \tilde{I}$ օրինակ օրինակ $f_\beta, f_\alpha \Leftarrow$

$$p \Vdash f: \check{A} \rightarrow \check{B}, p \in P \Vdash \Leftarrow M[G] \models \exists f = \check{f}_G \quad \square$$

$$F(a) := \{ b \in B : \exists q \leq p, q \Vdash f(\check{a}) = \check{b} \}$$

ד. $M[G]$ ו' $b \in B$ אז $f(a) = b$ ו' f איז א פונקציע, p איז א פונקציע, $f(a) = b \in F(a)$ אז $f(a) = b \in F(a)$

הערה: הרחבה של צורה ופונקציות למרחב $M \supset \alpha$, $(cf \alpha)^M = (cf \alpha)^{M[\alpha]}$.

תשובה: אם הכתובה שולמה ונפיקא לה, אז היא שולמה מן היום.

ה. אחרי, $k =$ המונה הראשון ב M לפני המונה ב $M[G]$. $M \triangleright M$:

$\lambda_0 \leq k$. אחר כך (אחרי גבול האנרגיה למטה, גולדמייס).

$$\hookrightarrow \text{מכיוון ש-} M[\mathbb{Q}] \text{ הוא שדה, } M[\mathbb{Q}] \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \iff (cf \, \kappa)^{M[\mathbb{Q}]} = (cf \, \kappa)^M = \kappa \therefore$$

Thy. 11

שאלה 2: נניח k לבן M ונניח $k \leq M$, M ונניח $k \leq M$, M ונניח $k \leq M$. אז ההרחבה $M \otimes V$ מונוטונית.

$$(\square \cdot X_0 \stackrel{(cf \alpha)^M}{\leq} X_0 \text{ s.t. } k = X_0 \text{ n.c.}) \cdot X_0 < k := (cf \alpha)^M; \quad \prod_C \alpha \in M \quad k \cap \cdot \cdot$$

$$M[G] \ni h: \lambda \rightarrow \kappa \text{ l' } \leftarrow \text{ " } \exists \alpha \in M \exists f: \kappa \rightarrow \alpha \leftarrow \lambda: g \in M[G] \text{ } \lambda := \{f\alpha\}^{M[G]}$$

~~$\kappa \leq \lambda \Leftrightarrow$ nicht def.~~

הוכחה ידועה ל $\mathbb{C}_K$ הוא $\mathbb{C}^K$ (על גורמים): נבחר $f \in \mathbb{C}_K$ ונניח $f \neq 0$.
 $f_p(n) \neq g(n)$ ל $p = n(f) \in \mathbb{C}_0$. נבחר $g \in A$ כך $a_p := \text{dom } f_p$.
 $(n \in \mathbb{C}_0)$ $A_n := \{g \in A \mid f_p(n) = n\}$.
 f_p היא 1 ב A_n ו 0 אחרת. f_p היא 1 ב A_n ו 0 אחרת.
 (f_n) היא סדרה של פונקציות $f_n: A_n \rightarrow \mathbb{C}$ כך $f_n(n) = 1$ ו $f_n(m) = 0$ ל $m \neq n$.
 $(m \in \text{dom } f_n)$ $A_{n,m}$ היא A_n ו $f_n(m) = 1$ ו 0 אחרת.
 $g(n) \neq f(n)$ ל $n \in \text{dom } f$ ו $g \neq f$. $g \in A \setminus \{f_p : p \in \mathbb{C}_0\}$.
 $g(n_1) = 1 - f_p(n_1)$ ל $n_1 \in \text{dom } f_p$ ו $g \in A_{n_1, n_1} \setminus \{f_{n_1, n_1}\}$.
 $g(n_2) = 1 - f_p(n_2) \neq f_p(n_2)$ ל $n_2 \in \text{dom } f_p$ ו $g \in A_{n_2, n_2} \setminus \{f_{n_2, n_2}\}$.
 $f_p \in A_{n_1}$.
 $g(n_2) = 1 - f_p(n_2) \neq f_p(n_2)$ ל $n_2 \in \text{dom } f_p$ ו $g \in A_{n_2, n_2} \setminus \{f_{n_2, n_2}\}$.
 $n_2 \neq n_1$.
 $\sum$ פונקציה $\text{dom } f$ ל 1 ב 3 .

הוכחה ל $\mathbb{C}H$ הוא $\mathbb{C}^H$ (על גורמים): כותבים $K = X_2^M$, $\mathbb{C}_K$.
 $f: X_1^M \xrightarrow{\text{neg}} X_2^M$ ל $f \in \mathbb{C}_K$.
 $M \ni X_1^M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F(n)$ ש f היא $M \ni F \ni \omega \rightarrow X_1^M$ כלולות $f: \omega \rightarrow X_1^M$ ל ω .
 $M \ni F: X_1^M \rightarrow X_2^M$ כלולות $f: X_1^M \xrightarrow{\text{neg}} X_2^M$ ל ω , כותבים $\omega \rightarrow X_1^M$ ל ω .

$$(2^\lambda)^{M[G]} \leq (k^\lambda)^M$$

$\theta = k^\lambda, \omega \leq \lambda, |P| = k \geq \omega, \text{ccc } P : M'' \models M \text{ n'j } : \text{לבן}$
 $2^\lambda \leq \theta : M'' \models M[G] \text{ st}$

λ k $\aleph_1$ $\aleph_2$ $\aleph_3$ $(k^{\aleph_0})^\lambda = k^\lambda \geq \aleph_1 \Leftrightarrow \aleph_1^k / [k]^\lambda = k^{\aleph_0} \geq \aleph_1 \Leftrightarrow \text{ccc } P : M \models$
 $(M[G] \models M \models) \{ \tau_\alpha : \alpha < \theta \}$ $\aleph_1$ $\aleph_2$ $\aleph_3$ $(\lambda = \{ \alpha^\vee : \alpha < \lambda \})$
 $\parallel P(\lambda) \in \{ (\tau_\alpha)_\alpha : \alpha < \theta \} : M[G] \models$

$k^{\aleph_0} = k : M'' \models M \text{ n'j } : \text{לבן}$
 $M \models \aleph_1$ $\aleph_2$ $\aleph_3$ G k $\aleph_1$
 $2^{\aleph_0} = k : M'' \models M[G] \text{ st}$

$P = G_k$
 $M[G] \models \forall (M = L^N ; N \models (N \models \text{ZFC})) M \models GCH \text{ k' } : \text{לבן}$

$$2^{\aleph_0} = \begin{cases} k & \text{cf}(k) > \aleph_0 \\ k^+ & \text{cf}(k) = \aleph_0 \end{cases} \quad (1)$$

$$2^\lambda = \begin{cases} 2^{\aleph_0} & \aleph_0 \leq \lambda < \text{cf}(k) \\ k^+ & \text{cf}(k) \leq \lambda < k \\ \lambda^+ & k \leq \lambda \end{cases} \quad (2)$$

$\square$ $\aleph_1$ $\aleph_2$ $\aleph_3$ $(\aleph_0 < \text{cf}(k) + GCH) \quad k^{\aleph_0} = k : M \models (1)$
 $\square \quad k^+ = (2^{\aleph_0})^{M[G]} \leq k \leq (2^{\aleph_0})^{M[G]} \leq (k^{\aleph_0})^M = k^+ : M \models (2)$
 $\aleph_0 < \text{cf}(k)$ לבן $\text{cf}(k) = \aleph_0$

$\aleph_0 < \text{cf}(k) \rightarrow k \leq (2^{\aleph_0})^{M[G]} \leq (k^{\aleph_0})^M = k : \text{לבן}, M \models GCH$
 $(\aleph_0 = \text{cf}(k)) \rightarrow \text{לבן} \quad \text{לבן} = k^+$
 $\aleph_0 < \lambda < \text{cf}(k) \rightarrow (2^{\aleph_0})^{M[G]} \leq (2^\lambda)^{M[G]} \leq (k^\lambda)^M = k \leq (2^{\aleph_0})^{M[G]}$
 $\lambda \leq \text{cf}(2^\lambda) \text{ לבן } \text{cf}(k) \leq \lambda < k \rightarrow k \leq \text{לבן} = (k^+)^M = (k^+)^{M[G]}$
 $2^\lambda \neq k$

$$\parallel k \leq \lambda \rightarrow \lambda^+ \leq (2^\lambda)^{M[G]} \leq (k^\lambda)^M = (2^\lambda)^M = \lambda^+$$

$(\aleph_0 \neq \aleph_1)$ $\aleph_1$ $\aleph_2$ $\aleph_3$ $(\aleph_0 \neq \aleph_1)$ $\aleph_1$ $\aleph_2$ $\aleph_3$ $2^{\aleph_0} = \aleph_1, 2^{\aleph_1} = \aleph_2, 2^{\aleph_2} = \aleph_3 : \text{לבן}$ (1) $\aleph_1$ $\aleph_2$ $\aleph_3$

$$2^{X_0} = X_7 : M[G] \supset \text{כפפה עם } \mathcal{C}_K \text{ : } 2^{13} : (X_7)^M$$

$$2^{X_1} = \dots = 2^{X_6} = X_7$$

$$2^{X_7} = X_8, 2^{X_8} = X_9, \dots$$

(GCH נלמדת מִפִּי א)

הקרה: $\kappa = X_0$ נגזר את הכפפה המקבילה $\mathcal{C}$ כדן. $cf \kappa = X_0$ $2^{X_0} = X_2$ בהחמרה,
 $M[G] \neq GCH$! $\kappa = X_2$ עם $\mathcal{C}_K$ נלמד
 לסנן: $ZFC + GCH + V \neq L$: עקבי
 גבולות: אי"ן חולל = גבול + גבולות
 אי"ן = גבולות (אי"ן $\leftarrow$ אי"ן $2^{\aleph_1}$) + גבולות

לדגל: המרחב הכפוף עקבי גבולות מידה:
 $T_1 : ZFC + \text{יש אי"ן חולל}$
 $T_3 : ZFC + 2^{X_0} \text{ אי"ן חולל}$
 $T_2 : ZFC + 2^{X_0} \leq \text{מנה אי"ן חולל}$
 $T_4 : ZFC + \text{יש אינלייט (חסר)}$

$$Con(T_3) \rightarrow Con(T_2) \rightarrow Con(T_1) \text{ ה.}$$

$Con(T_1) \rightarrow Con(T_4)$: גמון מודל T_1 נבנה את L . אי"ן חולל נלמד ככה ב L .
 $L \neq GCH$ אי"ן חולל הוא אי"ן ב L .

$(\kappa^{X_0} = \kappa)^M +$: נכפה עם $\mathcal{C}_K$. א נלמד.
 $Con(T_4) \rightarrow Con(T_3)$: גמון מודל T_4 : יהא א אי"ן. $2^{X_0} = \kappa$ נלמד נלמד (כי קובצת נלמד) וגבול (אנחנו)
 $(\lambda^+)^{M[G]} = \alpha^+)^M < \kappa$

$$(\kappa^{<\kappa} = \kappa, \text{ מלפני}), \kappa^{X_0} = \kappa \xrightarrow{X_0} \kappa = \bigcup_{\alpha < \kappa} \kappa_\alpha \xleftarrow{X_0} \kappa_\alpha < \kappa$$

החזרה יתרה עדיין =
מחזיקים בהוכחה להכרעה $2^{N_1} = N_3$ (ג) $M \in G$.

מחזיקים: $\mathcal{C}_{\omega_2, \omega_2} = \{f: \omega_2 \times \omega_2 \rightarrow 2 \mid |f| \leq N_0\}$ (א) אבסורד, מוכרז ב M .

מכאן N_3 איבדים על $\{0,1\}^{N_1}$. האם המונים שלמים?
[המשפט κ -cc (מכלול Δ -מכלול) $\Leftrightarrow$ יש מונה κ ופנימי κ]

הערה: $\mathcal{C}_{\kappa, \lambda}^M = \{f \in M \mid f: \kappa \times \lambda \rightarrow 2, |f| < \lambda\}$; $\mathcal{C}_{\kappa, \lambda} = \{f: \kappa \times \lambda \rightarrow 2 \mid |f| < \lambda\}$
כאשר κ, λ מונים ב M , $\kappa > N_0$, $\lambda > \kappa$.

אלה: Δ $G \in \mathcal{C}_{\kappa, \lambda}^M$ - עזרי מח M , אם $\mathcal{C}_{\kappa, \lambda}^M \cup G: \kappa \times \lambda \rightarrow 2$ פנימי שלמה.
(2) $M[G] \models |A| \leq 2^{\lambda}$ (אם F מונה).

* $\mathcal{C}_{\kappa, \lambda}$ לא ccc. (אם $\kappa < \lambda$ ואין $2^{N_0} \subseteq \mathcal{C}_{\kappa, \lambda}$)

הערה: Δ אם $\theta \geq N_0$ מונה θ ב M .

(1) אם P מונה ופנימי $\theta \geq \theta$, אז P מונה מונים $\theta \geq \theta$.

(2) $\theta \leq \theta$ (כאן למשל בדיבור θ)

(3) אם P מונה ופנימי $\theta \leq \theta$, אז P מונה ופנימי $\theta \leq \theta$.

(4) $\theta \geq \theta$, $\theta \geq \theta$

הערה: θ -cc: אם $\theta > \theta$.

אלה סלאלום: נניח $\frac{M}{cc-\theta} P$, $f: \overset{M}{A} \rightarrow \overset{M}{B}$, $M[G] \models \overset{M}{f}: \overset{M}{A} \rightarrow \overset{M}{B}$. ו' סלאלום $\overset{M}{F}: A \rightarrow P(B)$ עבור θ , אם $\forall a \in A (|F(a)| < \theta)$.

מסקנה: נניח $\frac{M}{cc-\theta} P$ אז P מונה ופנימי $\theta \leq \theta$.

אלה: $\mathcal{C}_{\kappa, \lambda}$ הוא $cc - (2^{\lambda})^+$ (מכלול Δ -מכלול). אם $\lambda \leq \lambda^+$ ופנימי $\lambda^+ \leq \lambda$.

בסעיף 7א של $C_{k, \lambda}$ ללא קשר לאיכות המידע

[illegible]

* λ רגולרי $\leftarrow C_{K, \lambda} - \lambda - 20$ (איננו יכול לניבא λ ללא $\lambda > 0$ הוא כזה).

$f \in M$ ידוע, $[G]M \ni f: A \rightarrow B$, M שומר על λ ו- μ : $\mu \circ \lambda = 1$

(f) $G \cap D = \emptyset \leftarrow p \in \text{מרכז } D + p \in G : \text{נניח}$

$\mu \leq \lambda, A = \sum \alpha_{\mu} : \alpha \leq \mu \} M \ni \gamma \text{ on } J$ $p \Vdash \dot{f} : \dot{A} \rightarrow \dot{B}$ on $\dot{J}$ $p \in G$ on J
 $r \Vdash \dot{f} = \dot{g}$ on J $M \ni g : A \rightarrow B$ $! r \leq q$ on $J, q \leq p$ on J

$$(M \models \text{true}) \quad D = \{ r \in P : (\exists g \in M) \ g : A \rightarrow B, r \Vdash f = g \}$$
$$\Box. f=g \in M \Leftarrow M[G] \models f=g \Leftarrow r \in G \cap D \quad v \Leftarrow p \text{ normal } \alpha \beta \gamma \delta \epsilon$$

$(f \in \mathcal{P})$
 $(\text{fals}) \quad p_0 \leq f \quad \mathcal{P}' \leftarrow M[H] \models f: A \rightarrow B, f \in H \text{ c'N } \mathcal{P}' \quad p_0 \Vdash f(\check{a}_0) = \check{b}_0 \quad \mathcal{P} \text{ y } b_0 \in B, p_0 \leq f \text{ n'}$
 $f(a_0) = b_0$

בהלכה μ ו $\alpha \leq \mu$ ו $\alpha \leq \mu$... $\leq p_1 \leq p$. כלומר α , $\beta < \alpha$ כלכל

$b_\alpha \in B$: $p_\alpha \leq \tilde{p}_\alpha$ (1, 2, 3) ... $p_\alpha \Vdash f(\check{a}_\alpha) = \check{b}_\alpha$
 $p_\alpha \Vdash f(a_\alpha) = b_\alpha$ (1) ...

$\Downarrow$ $r \Vdash f = g$! , $M \models g(a_\alpha) = b_\alpha$ $\hat{=}$ Wd $g : A \rightarrow B$

$$\therefore P \in M \text{ ו-} P \in \mathcal{P} \Rightarrow P \in M \cap \mathcal{P} \text{ ו-} P \in \mathcal{P} \cap M$$
$$\parallel f \in M \text{ s.t. } M[F] \ni f: \alpha \xrightarrow{F} X \text{ v. } \alpha \in X \text{ and } \alpha \in K \text{ and } \dots$$

$\therefore$ אם $\gamma \in M$: γ יכולי, $2^{\gamma} = \gamma$ (GCH) , $\gamma \in C_{\kappa, \gamma}^M$ ולכן הפנימי והחיצוני.

(a) (i) while σ is stable $M(F) \models 2^\lambda = \kappa$ so, $(GCH + \lambda < cf \kappa \rightarrow) \kappa^\lambda = \kappa$

213: כ"כ למשל k זכר ZFC :

$$CH + 2^{X_1} = X_2 + 2^{X_2} = X_3, k$$

$$CH + 2^{X_1} = X_3 + 2^{X_2} = X_4, ?$$

$$2^{X_0} = X_3 + 2^{X_1} = X_5 + 2^{X_2} = X_6, c$$

MF GCH מ"מ'ם

214: $2^{X_2} = X_0, C_{X_0, X_2}(k)$ $k < X_2$ א"ל k חסר $\aleph_0$ ו k א"ל

$$k^+ = (2^k)^M = (2^k)^{M[G]}$$

215: $2^{X_2} = X_3!$ X_2 א"ל GCH מ"מ'ם N א"ל C_{X_3, X_2} מ"מ'ם N

כ"כ מ"מ'ם N א"ל C_{X_3, X_2} מ"מ'ם N א"ל $CH + 2^{X_1} = X_3$

216: $2^{X_2} \leq X_3$! $(X_3 \text{ חסר } \aleph_0)$ $X_3 \leq 2^{X_2}$ מ"מ'ם

$$|C_{X_3, X_2}| \leq X_3^{X_0} \cdot 2^{X_0} = X_3 \Rightarrow (X_3^{X_0})^{X_2} \text{ names for subsets of } X_2$$

217: C_{X_3, X_0} מ"מ'ם $\aleph_0$! C_{X_5, X_2} מ"מ'ם k ! C_{X_6, X_2} מ"מ'ם k !