

# מתמטיקה בדידה – השלמות בן $\aleph_1$ וצאחות

הערות: סעיף "אתגר לקורא" הם תרגילי העשרה שפתרונם אינו נחוצ להבנת החומר. צובדות שהוכחו בהרצאה נאסרות כאן בלע הוכחה.

## מחלקות של ממש

**הגדרה.** אוסף של קבוצות שאינן קבוצה נקרא מחלקה של ממש.  
בין מחלקות של ממש ניתן להגדיר הכלה, חיתוך ועוד.  
איבר של מחלקה של ממש הוא תמיד קבוצה, לכן לא ניתן לשאול האם מחלקה של ממש היא איבר במחלקה אחרת, וכך איננו נתקלים בפרדוקס של Russel (ראה בדוגמא הבאה).

**דוגמא.**  $V = \{x : x \text{ קבוצה}\}$  נקראת המחלקה האוניברסלית.  $V$  היא מחלקה של ממש: אילו  $V$  היתה קבוצה, אז גם  $R = \{x : x \text{ קבוצה}, x \notin x\}$  היתה קבוצה ומכאן מקבלים את הפרדוקס של Russel, שכן מהגדרתו,  $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$ , סתירה.

## העוצמה של קבוצה

נשים לב, שבהרצאה לא הגדרנו את  $|A|$  עבור קבוצה  $A$ , אלא רק את המונחים  $|A| = |B|$ ,  $|A| \leq |B|$  ו  $|A| < |B|$ . הסיבה היא, שההגדרה אינה פשוטה והעדפנו להמנע ממנה בצעדים הראשונים שלנו בנושא. בסעיף זה נספק הגדרה אשר, לאחר מאמץ מסויים, תימצא מתאימה לכל מה שראינו.

**סימון.**  $A \approx B$  פירושו " $A$  שוות עוצמה ל  $B$ ", כלומר יש  $f: A \rightarrow B$  שהיא חד-חד ערכית ועל.

**אתגר לקורא.** האוסף  $\{(A, B) : A \approx B\}$  הוא מחלקה של ממש.

למרות שהתכונה  $\approx$  אינה יחס (כיון שאינה קבוצה), היא רפלקסיבית, סימטרית וטרנזיטיבית.  
לכן אפשר לדבר על "מחלקות שקילות" של היחס  $\approx$ . לכל קבוצה  $A$ , נסמן את מחלקה השקילות של  $A$  ביחס ל  $\approx$ :

$$[A] := \{B : A \approx B\}$$

**תרגיל.**  $[\emptyset] = \{\emptyset\}$ .

**אתגר לקורא.** עבור קבוצה  $A \neq \emptyset$ ,  $[A]$  היא מחלקה של ממש.

הגיג. הרעיון העומד בבסיס ההגדרה שלנו למונח עוצמה הוא זה: עוצמה של קבוצה, סופית או אינסופית, צריכה לציין את "מספר האיברים שלה". מהי המשמעות של "מספר"? אחת הדרכים "להגדיר" מספר היא "התכונה המשותפת לכל הקבוצות עם מספר זה של איברים". זו הגדרה מעגלית אמנם, אבל יש ברעיון תוכן. למשל, המספר 2 הוא התכונה היחידה המשותפת לכל הקבוצות  $\{x, y\}$  כאשר  $x \neq y$ . לכן, אפשר לזהות את 2 עם האוסף של כל הקבוצות האלו (ואז במקום לומר שהעוצמה של  $\{1, 3\}$  (למשל) היא 2, נאמר שהיא האוסף הנ"ל). הייתרון הוא שגישה זו עובדת גם במקרה שהקבוצה אינסופית. על כל פנים, יש לזכור שכל טענה יש לוודא על פי ההגדרה המתימטית שלה ולא על פי האינטואיציה הנ"ל, שנועדה רק לעזור להבנה.

**הגדרה.** העוצמה של קבוצה  $A$ , שמסומנת  $|A|$ , היא מחלקת השקילות שלה,  $[A]$ , ביחס  $\approx$ .

**דוגמא.** על פי ההגדרה,  $|\emptyset|$  היא אוסף כל הקבוצות שוות העוצמה ל  $\emptyset$ , לכן  $|\emptyset| = \{\emptyset\}$ . מאידך,  $|\{1, 2\}|$  היא אוסף כל הקבוצות שוות העוצמה לקבוצה  $\{1, 2\}$ , כלומר:  

$$|\{1, 2\}| = \{\{x, y\} : x \neq y\}$$

גישה זו נראית שונה ממה שאנו רגילים, אבל היא תואמת להגדרה, על פי המשפטון הבא (שים לב שהוא טעון הוכחה).

**משפטון.**  $|A| = |B| \Leftrightarrow A \approx B$ .

**הוכחה:** ( $\Leftarrow$ ) נניח  $A \approx B$ . צריך להוכיח ש  $|A| = |B|$ , כלומר לכל  $C$ , אם  $C \in |A|$  אז  $C \in |B|$ , ואם  $C \in |B|$ , אז  $C \in |A|$ . נוכיח את הטענה הראשונה (השניה מוכחת באותו אופן). נניח ש  $C \in |A|$ , כלומר  $A \approx C$ . נתון ש  $A \approx B$ . התכונה  $\approx$  סימטרית, לכן  $B \approx A$ . התכונה  $\approx$  טרנזיטיבית, לכן  $B \approx C$ , כלומר  $C \in |B|$ .

( $\Rightarrow$ ) נניח  $|A| = |B|$ . צריך להוכיח ש  $A \approx B$ .  $A \approx A$ , לכן  $A \in |A|$ . לכן מהנתון,  $A \in B$ , ולכן  $B \approx A$ . מסימטריות  $\approx$ ,  $A \approx B$ .  $\square$

**מוסכמה.** אם  $A \approx \{1, \dots, n\}$ , נכתוב  $|A| = n$  במקום  $|A| = [\{1, \dots, n\}]$ .  
 נכתוב גם  $|\emptyset| = 0$  במקום  $|\emptyset| = [\emptyset]$ .

**הגדרה.**  $A$  סופית אם יש  $n$  טבעי או 0 כך ש  $|A| = n$ . אחרת,  $A$  אינסופית.

קל לראות שכל תת-קבוצה של קבוצה סופית היא סופית, ושהקבוצה  $\mathbb{N}$  (ולכן כל קבוצה המכילה את  $\mathbb{N}$ , כגון  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ) היא אינסופית.

סימון.  $\aleph_0 := |\mathbb{N}|$ .

הערה.  $|A| = \aleph_0 \Leftrightarrow$  אפשר לרשום  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  כאשר הרשימה היא בלי חזרות.

משפטון.  $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$ .

משפטון.  $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$ .

## השוואת עוצמות

הגדרה.  $|A| \leq |B|$  אם יש  $f: A \rightarrow B$  חח"ע. אם  $|A| \leq |B|$  אבל  $|A| \neq |B|$ , נכתוב  $|A| < |B|$ .

לאור הגדרתנו למושג "עוצמה של קבוצה" בסעיף הקודם, יש להבין מדוע ההגדרה תקינה: נניח  $|A| \leq |B|$  על פי ההגדרה הנ"ל. אז לכל  $C, D$  המקיימים  $|A| = |C|$  וכן  $|B| = |D|$ , צריך להתקיים  $|C| \leq |D|$  לפי אותה ההגדרה. נוכיח שאכן זה המצב:  $|A| = |C|$ , לכן יש  $g: A \rightarrow C$  חד-חד ערכית ועל.  $|B| = |D|$ , לכן יש  $h: B \rightarrow D$  חד-חד ערכית ועל. בנוסף,  $|A| \leq |B|$  ולכן מההגדרה יש  $f: A \rightarrow B$  חד-חד ערכית. יוצא שהפונקציה  $h \circ f \circ g^{-1}: C \rightarrow D$  היא חד-חד ערכית כהרכבה של פונקציות חד-חד ערכיות. לכן, לפי ההגדרה,  $|C| \leq |D|$  כדרוש. הטענה שבדקנו זה עתה מנוסחת בקצרה כך:

מסקנה. המושג  $\leq$  בין עוצמות מוגדר היטב.

דוגמאות.  $|\{1, 2, 3\}| < |\{4, 5\}|$ , כלומר  $2 < 3$  גם כשהם מציינים עוצמות, כדרוש. לכל קבוצה סופית  $A$ ,  $|A| < |\mathbb{N}|$ . לפי הקיצורים שלנו, זה אומר שלכל  $n$  טבעי,  $n < \aleph_0$ .

משפטון.  $\leq$  בין עוצמות הוא:

א. רפלקסיבי, כלומר: לכל קבוצה  $A$ ,  $|A| \leq |A|$ .

ב. טרנזיטיבי, כלומר: לכל שלוש קבוצות  $A, B, C$ , אם  $|A| \leq |B| \leq |C|$ , אז  $|A| \leq |C|$ .

משפטון. אם  $A \subseteq B$ , אז  $|A| \leq |B|$ .

הגדרה. קבוצה  $A$  היא בת-מניה אם  $|A| \leq \aleph_0$  (כלומר:  $|A| \leq |\mathbb{N}|$ ).

הערה. כל תת-קבוצה של קבוצה בת-מניה היא בת-מניה.

**דוגמאות.**  $\mathbb{N}$  היא בת-מניה, ולכן כל קבוצה של מספרים טבעיים היא בת-מניה.

כנ"ל עבור  $\mathbb{Z}$ .

כל קבוצה סופית היא בת-מניה.

$\emptyset$  היא בת-מניה.

**משפט.**  $|A| \leq |B| \Leftrightarrow$  יש פונקציה  $f: B \rightarrow A$  שהיא על.

**מסקנה.** קבוצה לא ריקה  $A$  היא בת-מניה  $\Leftrightarrow$  ניתן לרשום  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  (עם או בלי חזרות).

**משפטון.** איחוד בן-מניה של קבוצות בנות-מניה הוא בן-מניה, כלומר:

אם  $A_1, A_2, \dots$  קבוצות בנות-מניה, אז הקבוצה  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  היא בת-מניה.

**הוכחה:** אם כל  $A_n$  ריקה אז  $A = \emptyset$  בת-מניה.

אחרת, אפשר להניח שכל הקבוצות  $A_n$  אינן ריקות (נמחק את הקבוצות הריקות מהרשימה. נקבל רשימה חדשה של קבוצות עם אותו איחוד ובלי קבוצות ריקות. אם הרשימה סופית, אפשר להרחיבה לאינסופית על ידי בחירה  $A_n = A_1$  לכל  $n$  שאינו בשימוש).

לכל  $n$ , ניקח  $f_n: \mathbb{N} \rightarrow A_n$  שהיא על, ונגדיר  $g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A$  על ידי  $g(n, m) = f_n(m)$ .  $g$  על, לכן  $\aleph_0 = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \geq |A|$   $\square$

**מסקנה.** איחוד של מספר סופי  $A_1, \dots, A_k$  של קבוצות בנות-מניה הוא בן-מניה.

**הערה.** אם  $A$  קבוצה סופית ו  $B \subset A$  (חלקית ממש), אז  $|B| < |A|$ .

**משפט הקבוצה האינסופית.** לכל קבוצה אינסופית  $A$ :

א. יש תת-קבוצה שעוצמתה  $\aleph_0$ . במלים אחרות,  $\aleph_0 \leq |A|$  (כלומר  $\aleph_0$  היא העוצמה האינסופית הקטנה ביותר).

ב. יש  $B \subset A$  (מוכלת ממש) כך ש  $|B| = |A|$ . למעשה, לכל  $a \in A$ ,  $|A \setminus \{a\}| = |A|$ .

**מסקנה.** אוסף הסדרות הסופיות של  $0/1$ -ים הוא בן-מניה (ואינסופי, לכן עוצמתו  $\aleph_0$ ).

**משפט (קנטור-ברנשטיין).**  $\leq$  בין עוצמות הוא אנטיסימטרי, כלומר:

אם  $|A| \leq |B|$  וכן  $|B| \leq |A|$ , אז  $|A| = |B|$ .

**משפטון.**  $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ .

הוכחה:  $\aleph_0 = |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$  , לכן  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$

מאידך, הפונקציה  $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  המוגדרת  $f(k, n) = \frac{k}{n}$  היא על. לכן  $\aleph_0 = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| \geq |\mathbb{Q}|$  □

משפט קנטור. לכל קבוצה  $A$ ,  $|A| < |P(A)|$ .

מסקנה. יש אינסוף עוצמות אינסופיות שונות, למשל  $\aleph_0 = |P(\mathbb{N})| < |P(P(\mathbb{N}))| < |P(P(P(\mathbb{N})))| < \dots$

משפט.  $\leq$  בין עוצמות הוא מלא, כלומר:

לכל  $A, B$ ,  $|A| \leq |B|$  או  $|B| \leq |A|$ .

את המשפט האחרון אפשר להוכיח בעזרת הלמה של Zorn, נושא שתלמד אי"ה בקורס אחר.

## עוצמת הרצף

סימון.  $\aleph = |\mathbb{R}|$ . לעתים כותבים  $c$  (בשביל continuum, כלומר רצף) במקום  $\aleph$ .

סימון. עבור מספרים ממשיים  $a < b$ , נסמן:

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \end{aligned}$$

משפטון.  $\left| \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right| = \aleph$ .

משפטון. לכל שני מספרים ממשיים  $a < b$ ,  $|(a, b)| = |(0, 1)|$ , לכן  $|(a, b)| = \aleph$ .

משפטון. לכל שני מספרים ממשיים  $a < b$ ,  $|(a, b)| = |[a, b]| = |(a, b]| = |[a, b[| = \aleph$ .

בהמשך נוכיח ש  $\aleph_0 < \aleph$ .

## פעולות חשבוניות על עוצמות

בסעיף זה נגדיר פעולות חיבור, כפל, וחזקה על עוצמות, כך שבמקרה של עוצמות סופיות יתקבלו חיבור, הכפל והחזקה הרגילים. נזכור שעוצמה  $\kappa = |A|$  היא פשוט מחלקת השקילות של  $A$  ביחס  $\approx$ .

**תרגיל.** לכל שתי עוצמות  $\lambda, \kappa$  קיימות קבוצות  $A, B$  זרות המקיימות  $|A| = \kappa$ ,  $|B| = \lambda$ .

**הגדרה.** יהיו  $\lambda, \kappa$  עוצמות כלשהן. סכום העוצמות  $\kappa$  ו  $\lambda$  הוא  $\kappa + \lambda = |A \cup B|$ , כאשר  $A, B$  קבוצות זרות המקיימות  $|A| = \kappa$ ,  $|B| = \lambda$ .

**תרגיל.** חיבור העוצמות  $\kappa + \lambda$  מוגדר היטב, כלומר:

אם  $|A| = |C| = \kappa$  וכן  $|B| = |D| = \lambda$  וכן  $A \cap B = \emptyset$  וכן  $C \cap D = \emptyset$ , אז  $|A \cup B| = |C \cup D|$ .

**דוגמא.**  $0 + \aleph_0 = n + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ .

**הוכחה:** נניח ש  $A, B$  זרות ומקיימות  $|B| = \aleph_0$  וכן  $|A|$  היא 0 או  $n$  טבעי או  $\aleph_0$ . אזי:  $A \cup B$  מכילה את  $B$  ולכן אינסופית, לכן  $|A \cup B| \geq \aleph_0$ . מאידך,  $A, B$  בנות-מניה ולכן  $A \cup B$  בת-מניה, כלומר  $|A \cup B| \leq \aleph_0$ . לכן  $|A \cup B| = \aleph_0$ .  $\square$

**דוגמא.**  $\aleph + \aleph = \aleph$ .

**הוכחה:** ניעזר בידוע לנו על קטעים של מספרים ממשיים:  $\aleph = |(0, 2)| = |(0, 1) \cup [1, 2)| = \aleph + \aleph$ .  $\square$

**משפט.** חיבור עוצמות הוא חילופי (קומוטטיבי), כלומר: לכל שתי עוצמות  $\lambda, \kappa$  מתקיים  $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$ .

**הוכחה:** יהיו  $A, B$  קבוצות זרות המקיימות  $|A| = \kappa$ ,  $|B| = \lambda$ . אזי  $|B \cup A| = \lambda + \kappa$ .  $\square$

**הגדרה.** יהיו  $\lambda, \kappa$  עוצמות כלשהן. מכפלת העוצמות  $\kappa$  ו  $\lambda$  היא  $\kappa \cdot \lambda = |A \times B|$ , כאשר  $A, B$  קבוצות כלשהן המקיימות  $|A| = \kappa$ ,  $|B| = \lambda$ .

**תרגיל.** מכפלת העוצמות  $\kappa \cdot \lambda$  מוגדרת היטב, כלומר:

אם  $|A| = |C| = \kappa$  וכן  $|B| = |D| = \lambda$ , אז  $|A \times B| = |C \times D|$ .

**דוגמא.**  $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ .

**הוכחה:**  $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ , לכן  $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$ .  $\square$

**מסקנה.** אם  $|A| = |B| = \aleph_0$ , אז  $|A \times B| = |A| \cdot |B| = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ , ולכל  $k$  טבעי  $|A^k| = |A|^k = \aleph_0^k = \aleph_0$ .

הגדרה. לכל מספר ממשי בקטע  $(0,1)$  מתאים פיתוח עשרוני יחיד  $0.a_1a_2a_3\dots$  שאינו מסתיים באינסוף תשיעיות. פונקצית השזירה הוא הפונקציה  $f:(0,1)^2 \rightarrow (0,1)$  המוגדרת על ידי

$$f(0.a_1a_2a_3\dots, 0.b_1b_2b_3\dots) = 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\dots$$

משפטון.  $\aleph \cdot \aleph = \aleph$ .

הוכחה: פונקצית השזירה היא חד-חד ערכית ועל, לכן  $\aleph = |(0,1)| = |(0,1) \times (0,1)| = \aleph \cdot \aleph$ .  $\square$

סימון. עבור קבוצות  $A, B$  נסמן  $f$  היא פונקציה מ  $A$  ל  $B$   $A^B = \{f\}$ .

הגדרה. יהיו  $\kappa, \lambda$  עוצמות כלשהן. חזקת העוצמות  $\kappa$  ו  $\lambda$  היא  $\kappa^\lambda = |A^B|$ , כאשר  $A, B$  קבוצות כלשהן המקיימות  $|A| = \kappa, |B| = \lambda$ .

תרגיל. חזקת העוצמות  $\kappa^\lambda$  מוגדרת היטב, כלומר:

אם  $|A| = |C| = \kappa$  וכן  $|B| = |D| = \lambda$ , אז  $|A^B| = |C^D|$ .

הגדרה. תהי  $A$  קבוצה כלשהי ותהי  $B \subseteq A$ . הפונקציה האופיינית של  $B$  היא הפונקציה  $\chi_B: A \rightarrow \{0,1\}$  המוגדרת על ידי

$$\chi_B(a) = \begin{cases} 1 & a \in B \\ 0 & a \notin B \end{cases}$$

משפטון. לכל קבוצה  $A$ ,  $|P(A)| = |\{0,1\}^A|$ .

הוכחה: הפונקציה  $F: P(A) \rightarrow \{0,1\}^A$  המוגדרת על ידי  $F(B) = \chi_B$  היא חד-חד ערכית ועל.  $\square$

מסקנה. לכל קבוצה  $A$ ,  $|P(A)| = 2^{|A|}$ .

מסקנה. לכל עוצמה  $\kappa$ ,  $\kappa < 2^\kappa$ .

הוכחה: תהי  $\kappa$  עוצמה כלשהי. ניקח  $A$  כך ש  $|A| = \kappa$ . ממשפט קנטור,  $\kappa = |A| < |P(A)| = 2^{|A|} = 2^\kappa$ .  $\square$

משפט.  $\aleph = 2^{\aleph_0}$ . בפרט,  $\aleph_0 < \aleph$ .

## פעולות חשבוניות על עוצמות: תכונות בסיסיות

משפט. הפעולות של חיבור וכפל עוצמות מקיימות קיבוץ, חילוף ופילוג.

משפט. תכונות בסיסיות של חזקת עוצמות:

$$א. (\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$$

$$ב. \kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$$

$$ג. (\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$$

$$ד. \kappa^\mu \leq \lambda^\mu \text{ אם } \kappa \leq \lambda \text{ אז } \lambda^\mu \leq \kappa^\mu$$

$$ה. \kappa^\lambda \leq \kappa^\mu \text{ אם } 0 < \lambda \leq \mu \text{ אז } \kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$$

$$ו. 1^\kappa = 1, \kappa^0 = 1$$

$$ז. \text{אם } 0 < \kappa \text{ אז } 0^\kappa = 0$$

הוכחה: את כל הטענות בשני המשפטים האחרונים מוכיחים בעזרת מציאת פונקציה מתאימה שהיא חד-חד ערכית (במקרה של שיון היא צריכה להיות גם על). למשל, נוכיח את (ד): יהיו  $A, B, C$  קבוצות כך ש  $|A| = \kappa, |B| = \lambda, |C| = \mu$ . צריך להוכיח  $|A^C| \leq |B^C|$ . נתון  $|A| = \kappa \leq \lambda = |B|$ , לכן יש פונקציה חד-חד ערכית  $F: A \rightarrow B$ . נגדיר פונקציה  $H: A^C \rightarrow B^C$ . בצורה הבאה: לכל  $f \in A^C$

$$H(f) = h$$

כאשר  $h \in B^C$  היא הפונקציה  $h(c) = F(f(c))$ .

$H$  חד-חד ערכית: נניח  $H(f_1) = h_1, H(f_2) = h_2$ . יש להראות ש  $f_1 = f_2$  לכל  $c \in C$ .

$$F(f_1(c)) = h_1(c) = h_2(c) = F(f_2(c))$$

$F$  חד-חד ערכית, לכן  $f_1(c) = f_2(c)$ . הדבר נכון לכל  $c \in C$ , לכן  $f_1 = f_2$ .  $\square$

משפט (ללא הוכחה). אם  $\kappa$  או  $\lambda$  אינסופי, אז  $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$ .

משפט. אם  $2 \leq \kappa \leq 2^\lambda$  ו  $\lambda$  אינסופי, אז  $\kappa^\lambda = 2^\lambda$ .

הוכחה:  $2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda \cdot \lambda} = 2^\lambda$ , לכן יש שיון.  $\square$

$$\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

$$\aleph_0^3 = \aleph_0$$

$$\aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

$$5 + \aleph_0^3 + \aleph^{\aleph_0} + \aleph = 5 + \aleph_0 + \aleph + \aleph = \aleph_0 + \aleph + \aleph = \aleph + \aleph = \aleph$$

$$|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = \aleph^{\aleph_0} = \aleph$$