

חוברת תרגילי בית לקורס מתמטיקה בדידה

קיץ תשס"ו

יש להגיש לפחות חמישה תרגילים.
סטודנט שלא יגיש את תרגילי הבית לא יעבור את הקורס.

משקל התרגילים בחישוב הציון הסופי

התרגילים מהווים 20% מציון הקורס.

מועד הגשת התרגילים

מועד אחרון להגשת התרגיל הראשון הוא 19.07.06.
מועד אחרון להגשת התרגיל השני הוא 26.07.06.
מועד אחרון להגשת התרגיל השלישי הוא 2.08.06.
מועד אחרון להגשת התרגיל הרביעי הוא 9.08.06.
מועד אחרון להגשת התרגיל החמישי הוא 16.08.06.
מועד אחרון להגשת התרגיל השישי הוא 23.08.06.

המרצים והמתרגלים מאחלים לסטודנטים לימוד מהנה
והצלחה בקורס

תרגיל 1

1. רשום את איברי הקבוצות $A \cup B$ ו- $A \cap B$ כאשר:
 - א. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ו- $B = \{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$.
 - ב. $A = R$ ו- $B = Q$ היא קבוצת המספרים הממשיים ו- Q היא קבוצת המספרים הרציונליים.
 - ג. $A = \{x \in R \mid x \leq 1\}$ ו- $B = \{x \in R \mid x \geq -6\}$.
 - ד. $A = \{x \in R \mid x \leq 1\}$ ו- $B = \{x \in Z \mid x \geq -6\}$.
2. יהיו A, B, C קבוצות. הראה ש-

$$(A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) = [(A \cup B^c) \cap (C \cup B^c)]^c$$
 - א. ע"י דיאגרמת וון.
 - ב. ע"י לוח השתייכות.
3. הוכח שהפרש סימטרי היא פעולה אסוציאטיבית (כלומר: $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$).
 - א. ע"י דיאגרמת וון.
 - ב. ע"י לוח השתייכות.
4. הוכח את הטענות הבאות:
 - א. $(A \cap B) = (A \cup B^c) \cap B$.
 - ב. $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$.
 - ג. $\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \setminus \left(\bigcap_{j=1}^m B_j\right) = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m (A_i \setminus B_j)$.
5. הוכח:
 - א. לכל $i \in I$ מתקיים $\bigcap_{i \in I} F_i \subseteq F_i \subseteq \bigcup_{i \in I} F_i$.
 - ב. אם $A \subseteq F_i$ לכל $i \in I$ אזי $A \subseteq \bigcap_{i \in I} F_i$.
 - ג. אם $A \supseteq F_i$ לכל $i \in I$ אזי $\bigcup_{i \in I} F_i \subseteq A$.
6. R היא קבוצת המספרים הממשיים, N קבוצת המספרים הטבעיים, Z קבוצת המספרים השלמים.
 - א. הצג $R = \bigcup_{i \in N} B_i$ כאשר הקבוצות B_i זרות זו לזו ולא ריקות.
 - ב. הצג $N = \bigcap_{i \in N} C_i$ כאשר לכל $i \in N$, $C_i \subseteq N$ ו- $C_i \neq N$.
 - ג. הצג $Z = \bigcap_{i \in N} D_i$ כאשר לכל $i \in N$, $D_i \subseteq Z$ ו- $D_i \neq Z$.
7. נתון: $A_n = [\frac{1}{2n}, 1 + \frac{1}{n}]$ (קטעים סגורים); $B_n = (\frac{1}{2n}, 1 + \frac{1}{n})$ (קטעים פתוחים).

חשב: $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

8.

- א. יהי $A = \{\{1\}, \emptyset\}$. רשום את $P(A)$.
- ב. יהי $B = \{1, \{\emptyset\}\}$. רשום את $P(B)$.
- ג. חשב כמה איברים יש בקבוצה $P(P(P(P(\emptyset))))$.
- ד. תהי A קבוצה. הוכח ש $|P(P(P(A))) \cap P(P(A))| \geq 2$.
- ה. תהיינה $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$. חשב כמה איברים יש בקבוצה:
 $P(P(A) \cup P(B)) \setminus P(P(A) \cap P(B))$
- ו. הוכח או הפרך: $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$
- ז. הוכח או הפרך: $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$.

9. תהי X קבוצה. R נקרא חוג מעל X , אם מתקיים:

- א. $R \subseteq P(X)$
- ב. $\emptyset \in R$
- ג. $\forall A, B \in R$ מתקיים $(A \setminus B) \cap (A \cup B) \in R$.
- הוכח כי $\forall A, B \in R$ מתקיים $A \cap B \in R$.

10. יהיו A, B, C, D קבוצות הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- א. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$
- ב. $(A \cup B) \times (C \cup D) \subset (A \times C) \cup (B \times D)$ (מוכל ממש)
- ג. $(A \cup B) \times (C \cup D) \supset (A \times C) \cup (B \times D)$
- ד. $(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \setminus C) \times (B \setminus D)$

11. לכל אחת מן הקבוצות הבאות, קבע אם קיימות $A, B \subseteq R$ כך שהקבוצה הנתונה שווה ל-

$A \times B$. אם כן מצא את A ואת B . אם לא- הוכח שאין כאלו.

- א. $\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
- ב. $\{x \in R \mid x > 5\} \cap \{y \in R \mid y < 9\}$
- ג. $\emptyset$
- ד. $R \times R \setminus \{(x, y) \in R \times R : |x|, |y| \leq 1\}$
- ה. $\{x \in R \mid x > 5\} \cap \{y \in R \mid y < 9\}$

תרגיל 2

1. ציינו לכל אחד מהיחסים הבאים האם הוא רפלקסיבי, סימטרי או טרנזיטיבי. אם מדובר ביחס שקילות, מצאו את מחלקות השקילות שלו ואת קבוצת המנה.

א. $R_1 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}, a < b\}$

ב. $R_2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}, a \leq b\}$

ג. $R_3 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}, a = b\}$

2. היחסים הבאים מוגדרים מעל קבוצת המספרים הממשיים. לגבי כל אחד מהם, קבע אם הוא יחס שקילות:

א. $|x - y| < 1 \Leftrightarrow xRy$

ב. $x - y < 1 \Leftrightarrow xSy$

ג. $x - y < -1 \Leftrightarrow xTy$

3.

א. R הוא יחס בינארי על קבוצה A . הוכח כי אם R סימטרי אז R^n סימטרי לכל n טבעי.

ב. הוכח כי יחס אסימטרי (כלומר $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R$) הוא גם יחס אנטי סימטרי.

ג. תן דוגמא של יחס שאינו רפלקסיבי ואינו אנטי-רפלקסיבי (כלומר יחס R שמקיים: $(\forall a \in A, (a, a) \notin R)$).

ד. תן דוגמא של יחס שהוא גם סימטרי וגם אנטי סימטרי.

ה. תן דוגמא של יחס שהוא גם רפלקסיבי וגם אי-רפלקסיבי.

4. נתונה הקבוצה A ואוסף תת-קבוצות שלה $A_1, A_2, \dots, A_n$. נגדיר יחס R על A ע"י:

$$R = \{(x, y) : y \in A_i \text{ וגם } x \in A_i \text{ עבורו } i \text{ קיים}\}$$

הוכח או הפרך:

א. $R \Leftarrow \bigcup_{i=1}^n A_i = A$ רפלקסיבי.

ב. $\bigcup_{i=1}^n A_i = A \Leftarrow R$ רפלקסיבי.

ג. לכל $1 \leq i < j \leq n$ מתקיים: $R \Leftarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ רפלקסיבי.

ד. R טרנזיטיבי $\Leftarrow$ לכל $1 \leq i < j \leq n$ מתקיים: $A_i \cap A_j = \emptyset$.

5. יהיו $R \subseteq A \times B$, $V \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, $W \subseteq B \times C$, $T \subseteq C \times B$. הוכח כי:

א. $(R \subseteq V) \wedge (S \subseteq W) \Rightarrow S \circ R \subseteq W \circ V$

ב. $(S \cup W) \circ R = (S \circ R) \cup (W \circ R)$

ג. הוכח ע"י דוגמא נגדית שהטענה $(S \cap W) \circ R = (S \circ R) \cap (W \circ R)$ אינה נכונה.

6.

- א. נתונים היחסים :
 $R = \{(1,2), (3,4), (2,2)\}$, $S = \{(4,2), (2,5), (3,1), (1,3)\}$
 $R \circ S, S \circ R, (R \circ S^{-1}) \circ R, (S^{-1} \circ R^{-1}) \circ S$
- ב. בשני הסעיפים הבאים בדוק האם היחס R מעל מקבוצה A הוא יחס שקילות. אם כן, מצא את מחלקות השקילות :
- i. $A = \mathbb{N}$ $xRy \Leftrightarrow 3 \mid (x+2y)$ (המספרים הטבעיים)
 ii. B קבוצה בעלת n איברים, $n \geq 2$, ו- $A = P(B)$
 $xRy \Leftrightarrow (x \subseteq y) \vee (y \subseteq x)$
7. יהי E יחס שקילות על קבוצה A , ויהי F יחס שקילות על קבוצה B . יהי
 $G = \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \mid (a_1, a_2) \in E, (b_1, b_2) \in F\}$
 הוכח כי G הוא יחס שקילות על $A \times B$.
8. תהי A קבוצה. יהיו S ו- R יחסי שקילות על A . קבע לגבי כל אחד מן היחסים הבאים אם הוא יחס שקילות, והוכח את קביעתך :
- א. $R \cup S$
 ב. $(A \times A) \setminus R$
 ג. $(A \times A) \setminus R \cup I_A$
 ד. $R \setminus S$
 ה. $R \circ R$
 ו. $R \circ S$
- (I_A הוא יחס הזהות, לדוגמא אם $A = \{1, 2, 3\}$ אז $I_A = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$)
9. תהיינה A, B שתי קבוצות. נגדיר $f : A \rightarrow B$ ע"י $f(x) = x^2$. בכל אחד מהמקרים הבאים קבע האם f פונקציה ונמק את תשובתך (R היא קבוצת המספרים הממשיים ו- Z קבוצת המספרים השלמים).
- א. $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}$
 ב. $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{Z}$
 ג. $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{R}$
 ד. $A = \mathbb{Z}_5, B = \mathbb{Z}_5$ כאשר $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ היא קבוצת השאריות המתקבלות ע"י חלוקה ב-5.
10. יהיו A, B קבוצות לא ריקות.
- א. הוכח כי קיימת פונקציה חח"ע $g : A \rightarrow A \times B$.
 ב. הוכח כי אם קיימת פונקציה חח"ע $f : A \rightarrow B$ אזי קיימת פונקציה חח"ע $h : A \times B \rightarrow A \times B$.
11. ציינו לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא חח"ע, על או הפיכה. אם הפונקציה הפיכה - מצאו את הפונקציה ההופכית. הוכיחו תשובותיכם :
- א. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = n$
 ב. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = n^3$
 ג. $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = 2^n$

- ד. תהי A קבוצה כלשהי ותהי $f : P(A) \rightarrow P(A)$ פונקציה המוגדרת על ידי $f(B) = A \setminus B$.
- ה. נגדיר את הפונקציה F באופן הבא: יהיו X, Y שתי קבוצות ותהי $f : X \rightarrow Y$ פונקציה חח"ע. $F : P(X) \rightarrow P(Y)$ מוגדרת ע"י $F(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ לכל $A \in P(X)$.
- ו. כמו סעיף ה' אבל הפונקציה $f : X \rightarrow Y$ היא על.

12. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א. $f^{-1}[D_1 \cup D_2] = f^{-1}[D_1] \cup f^{-1}[D_2]$

ב. $f^{-1}[D_1 \cap D_2] = f^{-1}[D_1] \cap f^{-1}[D_2]$

ג. $f[C^c] = (f[C])^c$

ד. $f^{-1}[D^c] = (f^{-1}[D])^c$

ה. $f[C_1 \setminus C_2] = f[C_1] \setminus f[C_2]$

ו. $f^{-1}[D_1 \setminus D_2] = f^{-1}[D_1] \setminus f^{-1}[D_2]$

13. יהיו $f : A \rightarrow B$ ו $g : B \rightarrow C$ פונקציות.

א. הוכח שלכל קבוצה D החלקית ל C , $(g \circ f)^{-1}[D] = f^{-1}[g^{-1}[D]]$.

ב. הוכח שאם f, g הפיכות אז $g \circ f$ הפיכה ו $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

תרגיל 3

1. הוכח שאם $|A| = |B|$ או $|A \setminus B| = |B \setminus A|$.
2. תהי הקבוצה $B = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$. הוכח ש B בת מנייה.
3. הוכח או הפרד: אם $|A| = |B|$ אז קיימת פונקציה f חח"ע מ- A ל- B שאינה על.
4. תהי A קבוצה של קטעים פתוחים על הישר הממשי כך שכל שני קטעים בקבוצה זרים זה לזה. הוכח ש A היא סופית או בת-מנייה. (רמז: מכל קטע בחר מספר רציונלי. קיבלת פונקציה חח"ע מקבוצת הקטעים לתוך קבוצת הרציונלים $\mathbb{Q}$. הוכח זאת!).
5. נניח כי A קבוצה אינסופית. הוכח:
 - א. כל קבוצה B המקיימת $A \subseteq B$ היא אינסופית.
 - ב. כל קבוצה B שעבורה קיימת פונקציה חח"ע $f: A \rightarrow B$ היא אינסופית.
 - ג. לכל קבוצה לא ריקה B הקבוצה $A \times B$ אינסופית.
 - ד. קבוצת כל הפונקציות מ- B ל- A היא אינסופית.
6. הוכח שלכל קבוצה A מתקיים $|A| \leq |P(A)|$.
7. מהי עוצמת קבוצת כל הסדרות העולות של מספרים טבעיים?
8. תן דוגמא לקבוצה שעוצמתה גדולה ממש מעוצמת הרצף.

תרגיל 4

1. הוכח ש:
 - א. לכל עוצמה k , $k < 2^k$.
 - ב. לכל עוצמה יש עוצמה גדולה ממנה.
2. יהיו k, λ, η עוצמות. הוכח כי:
 - א. $k^{\lambda+\eta} = k^\lambda \cdot k^\eta$.
 - ב. $(k^\lambda)^\eta = k^{\lambda \cdot \eta}$.
3. יהיו k, λ, μ עוצמות. הוכח ש:
 - א. אם $k \leq \lambda$ אז $k^\lambda \leq k^\mu$.
 - ב. אם $0 < \lambda \leq \mu$ אז $k^\lambda \leq k^\mu$.
 - ג. אם $k > 0$ אז $0^k = 0$.
 - ד. $1^k = 1, k^0 = 1$.
4. חשב:
 - א. $\aleph_0 + 1$
 - ב. $2 + 2^{\aleph_0}$
 - ג. $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0}$
 - ד. $2^{\aleph_0} \cdot \aleph_0 + 2^{2^{\aleph_0}}$
5. מצא את העוצמה של קבוצת כל המספרים הממשיים האי-רציונאליים בין 0 ל-1.
6.
 - א. חשב את העוצמה של הקבוצה $R[x]$ (קבוצת הפולינומים ב x עם מקדמים ב R).
 - ב. מספר ממשי נקרא **אלגברי** אם הוא שורש של פולינום מ- $R[x]$. הוכח כי קבוצת המספרים האלגבריים היא בת-מניה (רמז: לכל פולינום יש מספר סופי של שורשים).
 - ג. הסק כי יש מספרים ממשיים שאינם אלגבריים.
7. חשב את עוצמת קבוצת הפונקציות החח"ע ועל מקבוצת המספרים הטבעיים לעצמה.
8.
 - א. בכמה דרכים ניתן לסדר n אנשים סביב שולחן עגול?
 - ב. בכמה דרכים ניתן להושיב n גברים ו n נשים סביב שולחן עגול, כך שלא יישבו שתי נשים זו ליד זו או שני גברים זה ליד זה?

הערה: שני סידורים נחשבים זהים אם אחד מתקבל מהשני ע"י סיבוב השולחן.
9. נתונים n תאים בשורה ו- k כדורים שיש להכניס לתאים. בכמה דרכים ניתן להכניס את הכדורים לתאים כאשר:
 - א. אסור לשים יותר מכדור אחד בתא והכדורים שונים זה מזה.
 - ב. אסור לשים יותר מכדור אחד בתא והכדורים זהים זה לזה.
 - ג. מותר לשים יותר מכדור אחד בתא והכדורים שונים זה מזה.
 - ד. מותר לשים יותר מכדור אחד בתא והכדורים זהים זה לזה.

10. יהי $n > 0$. בכמה דרכים ניתן לחלק $2n$ כדורים לבנים ו- n כדורים צבעוניים (ב- n צבעים שונים) ל-
- $3n$ תאים, כדור אחד בכל תא;
 - $3n$ תאים, כדור לבן אחד לכל היותר בכל תא;
 - n תאים, מספר שווה של כדורים לבנים וצבעוניים בכל תא.
11. בכמה אופנים שונים ניתן להושיב n אנשים בספסל בעל k מקומות? יש להבדיל בין המקרים $n \leq k$ ו- $n > k$.
12. מהו מספר החלוקות של מספר כלשהו של כדורים זהים ל- n תאים שונים, אם מספר הכדורים בכל תא (פרט לראשון) צריך להיות יותר גדול ממספר הכדורים בתא שלפניו, ובכל תא אפשר לשים לכל היותר k כדורים?
13. מ-3 סטודנטים של שנה א', 5 סטודנטים של שנה ב', 4 סטודנטים של שנה ג' ו-2 סטודנטים לתואר שני מרכיבים וועד. בכמה אופנים ניתן לעשות זאת אם:
- בוועד יש 4 אנשים.
 - בוועד יש נציג אחד לכל אחת מהקבוצות הנ"ל.
 - בוועד יש 2 אנשים: נציג אחד לתלמידי שנים א' ו-ב' ונציג אחד לתלמידי שנה ג' ולתלמידי תואר שני.
 - בוועד יש 3 אנשים שהם נציגים של 3 קבוצות שונות.

תרגיל 5

1.
 - א. הוכיחו ש $\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$
 - ב. נתונים $3n+1$ איברים, מתוכם יש n איברים זהים ו $2n+1$ איברים שונים. מהו מספר הדרכים לבחור n איברים מתוכם.
2.
 - א. הוכיחו את אי השוויון הבא: $\binom{n}{j+k} \leq \binom{n}{j} \binom{n-j}{k}$
 - ב. מתי יהיה זה שוויון ממש?
3. הוכיחו ש $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ מספר שלם חיובי לכל n שלם ואי שלילי.
4. הוכיחו את הזהות הבאה: $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}$
5. מטילים קובייה n פעמים בזו אחר זו. מהו מספר האפשרויות:
 - א. כאשר אין הגבלות?
 - ב. כאשר התקבלו בסה"כ 3 ערכים שונים?
 - ג. כאשר כל אחת משש התוצאות האפשרויות תתקבל לפחות פעם אחת?
6.
 - א. בכמה דרכים ניתן לבחור 5 קלפים מתוך חבילה של 52 קלפים, כך שבין 5 הקלפים יש לפחות קלף אחד מכל סוג (לב,עלה,יהלום,תלתן)?
 - ב. כמה מספרים בין 1 ל-10000 הם אי זוגיים, אינם מתחלקים ב-7 ואינם ריבועים שלמים?
 - ג. כמה מספרים בין 1 ל-3000 אינם מתחלקים באף אחד מהמספרים 3,4,5?
 - ד. כמה מספרים בין 1 ל-1000 מתחלקים בדיוק באחד מהמספרים 3,4,5?
 - ה. כנ"ל לגבי מספרים בין 1001 ל-2000.
 - ו. חשב כמה מספרים שלמים בין 1 ל-1000 מתחלקים בדיוק בשנים בין המספרים 7,8,9.
7.
 - א. מה מספר הפתרונות למשוואה $a+b+c+d+e=10$
 - i. כאשר כל המשתנים מספרים שלמים לא שליליים.
 - ii. כאשר כל המשתנים הם מספרים שלמים חיוביים (גדולים ממש מאפס) ובנוסף לכך a מספר שלם אי זוגי.
 - ב. מהו מספר הפתרונות של אי השוויון $x_1+x_2+x_3+x_4 \leq 10$ כסכום של מספרים שלמים לא שליליים?
 - ג. מהו מספר האפשרויות לפתור את המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=15$ כאשר $1 \leq x_i \leq 7$
 - ד. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=25$ כאשר $1 \leq x_1 \leq 6$ $0 \leq x_2 \leq 8$ $-2 \leq x_3 \leq 3$ $6 \leq x_4 \leq 10$

8. כל תלמיד בשנה א' לומד לפחות אחד משלושת הקורסים הבאים: מחשבים, אנגלית ומתמטיקה. רישום התלמידים לקורסים נעשה על פי הטבלה הבאה:

שמות הקורסים	מספר התלמידים הרשומים
מחשבים	25
אנגלית	20
מתמטיקה	33
מחשבים ואנגלית	15
מחשבים ומתמטיקה	25
אנגלית ומתמטיקה	20
מחשבים, אנגלית ומתמטיקה	15

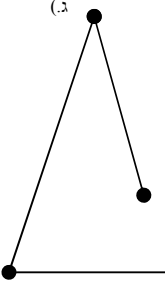
כמה תלמידים יש בסה"כ בשנה א'?

9. יש 10 מכתבים שיש לשוחם ל-10 מענים. כמה אפשרויות יש ש-5 מכתבים כלשהם יגיעו ליעדם, ו-5 מכתבים לא יגיעו ליעדם?
10. תהי $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ הוכיחו שבכל תת-קבוצה של A שבה 6 מספרים, יש שני מספרים שסכומם 9.
11. בכמה דרכים ניתן לבחור k שלמים מתוך הקבוצה $\{1, \dots, n\}$ כך שלא יהיה אף זוג שלמים עוקבים.
12. רשום נוסחת נסיגה למספר הווקטורים הבינאריים באורך n שאינם מכילים את הרצף 001.
13. מצא פונקציה רקורסיבית למציאת מספר האזורים שמחלקים n ישרים במישור, אם כל שני ישרים נחתכים ואין 3 ישרים הנחתכים באותה נקודה.
14. רשום נוסחה כללית לפתרון נוסחת הנסיגה:
 א. $f(n) = 5f(n-1) - 6f(n-2) + 7$ עם ערכי התחלה $f(0) = 1, f(1) = 2$.
 ב. $f(n) = 4f(n-1) - 3f(n-2) + 2^n$ עם ערכי התחלה $f(0) = 2, f(1) = 0$.
15. בצלצול פעמון, תמורות עוקבות של n פעמונים מנוגנות אחת אחר השנייה. עבור תמורה π , התמורה הבאה חייבת להתקבל מ- π ע"י הזזת המיקום של כל פעמון במקום אחד לכל היותר.
לדוגמא: עבור $n=4$ התמורה 1234 יכולה להתקבל ע"י אחת מהתמורות הבאות:
 2134, 2143, 1324, 1243.
 הוכיחו כי אם a_n מייצג את מספר התמורות שניתן לבנות מ- $1, 2, \dots, n$, אז מתקיים
 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. מצאו את a_n .

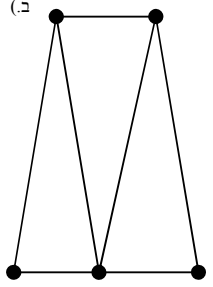
תרגיל 6

1.
 - א. מצא גרף עם $n-1$ צלעות שקוטרו 2.
 - ב. יהי G גרף לא מכוון עם n קודקודים שבו לכל קודקוד יש דרגה קטנה ממש n .
 3. $\sqrt{n-1}$. הוכיחו שהקוטר של G הוא לפחות 3.

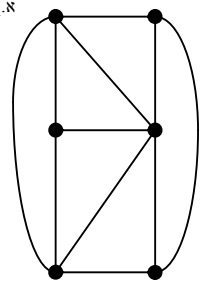
רמז: בחרו קודקוד כלשהוא v_0 , חשבו כמה קודקודים קיימים לכל היותר מרוחקים ממנו 1 וכמה קודקודים לכל היותר מרוחקים ממנו 2.
2. יהי G גרף לא מכוון, שאיננו קשיר. הוכיחו כי הגרף המשלים של G קשיר והקוטר שלו הוא לכל היותר שתיים. (הגרף המשלים הוא הגרף שמתקבל מהגרף אם מוסיפים את כל הצלעות שאינן נמצאות, ומוחקים את כל הצלעות שנמצאות - ז"א $\{u, v\}$ הוא צלע במשלים של G אם u, v אינו צלע ב G)
3. $G=(V,E)$ הוא גרף לא מכוון. הוכיחו כי אם לכל $e \in E$ הגרף $G - \{e\}$ הוא עץ, אז G הוא מעגל.
4. כמה מעגלים פשוטים שונים ייתכנו (לכל היותר) בגרף בעל n קודקודים?
5. הוכיחו שגרף לא-מכוון G קשיר אמ"מ לכל זוג קודקודים u, v יש מסלול פשוט בין u ל- v .
6. הוכיחו כי לעץ סופי (עץ עם מספר צלעות $1 \leq$) יש לפחות 2 קודקודים כך שדרגתם שווה ל-1.
7.
 - א. יהי G גרף מישורי קשיר עם p קודקודים ו- q צלעות כאשר $p \geq 3$. הוכיחו כי $q \leq 3p - 6$.
 - ב. בידקו נכונות של ההוכחה בשאלה א. עבור הגרפים הבאים:



(א.)



(ב.)



(ג.)
8. יהי G גרף מישורי קשיר וסופי עם מספר הקודקודים גדול מ-3. הראה כי יש ל- G לפחות קודקוד אחד מדרגה קטנה או שווה 5.
9. גרף K_4 ידוע כגרף מישורי שבדרך כלל מצויר עם צלעות נחתכות כמו בציור למטה. ציירו את הגרף הזה ללא צלעות נחתכות.

