

מבחן במתמטיקה בדידה

סמסטר קיץ ה'תשס"ה (30/7) (6.9.05)
יום שלישי, ב' באלול ה'תשס"ה (6.9.05)

מספר קורס: 88-195-10/12. **מרצים:** אלי בגנו, דוד גרבר, ובוני צבאן. **מתרגלים:** אפי כהן, ארתור יוסף. **חומר עזר:** אין להשתמש בחומר עזר.

משך הבחינה: שעה וחצי (90 דקות). **הנחיות:**

- יש לציין את מספר המחברת בראש עמוד זה.
- אם שאלה מסוימת אינה ברורה, או שנראה לך כי יש בה טעות, נא כתוב לפני התשובה כיצד הבנת את השאלה והבודק יתחשב אם יש מקום לכך.
- המבחן מורכב משני חלקים. חלק א' מכיל שאלות פתוחות, עליהן יש לענות במחברת הבחינה, וחלק ב' הוא רב-ברירתי (multiple choice), ועליו יש לענות על גבי הטופס. לטייטה, יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, ולציין זאת בראש העמוד.
- תנאי הכרחי לקבלת ציון "עובר" בבחינה הוא צבירת 60% לפחות מהציון המירבי בכל אחד משני חלקי הבחינה.
- יש להחזיר את טופס המבחן יחד עם מחברת הבחינה, גם אם אינך מעוניין להבחן (החזיר מלא/פרט).
ו. שים לב שסדר השאלות הוא אקראי, ולא בהכרח תואם את הסדר שבו נלמד החומר בכתה.

חלק א: שאלות פתוחות (40 נקודות)

ענה על שתי שאלות בדיוק מתוך שלושת השאלות הבאות. את התשובות/הוכחות עליך לכתוב במחברת הבחינה, בדף נפרד מדפי הטייטה של פתרונות חלק ב'.

שאלה 1. (20 נקודות)

- נסח והוכח את כלל ההכלה וההדחה.
- $2n$ ליצינים יושבים בקרוסלה בת $2n$ מקומות מסומנים, כך שכל אחד מהם רואה מולו בדיוק ליצן אחד. הוכח שיש בדיוק

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot 2^k \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot (2n-2k)!$$

אופנים בהם הם יוכלו להחליף מקומות כך שכל אחד מהם יראה ליצן חדש מולו?
(נמסר: חשב את $|P_i|$ כאשר P_i היא קבוצת הסיבירים שבהם הוצע ה- i יושבים אחד מול השני. חשב את $|\bigcup_{i=1}^n P_i|$)

שאלה 2. (20 נקודות)

- הוכח, בעזרת חוקי חשבון עוצמות: $10^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.
- בנה פונקציה מפורשת $f: [0, 1) \rightarrow (0, 1)$ שהיא חד-חד ערכית ועל.
- הוכח ש $|(0, 1)| = 2^{\aleph_0}$. יש לתאר את הפונקציות בהן אתה משתמש ולציין (בלי הוכחה) את תכונותיהן.

שאלה 3. (20 נקודות)

- נסח והוכח את נוסחת אוילר עבור גרף מישורי קשיר.
- הוכח שהגרף K_5 אינו מישורי.

חלק ב: שאלות רב-ברירות (60 נקודות: 5 נקודות לכל תשובה נכונה).

הקף בעיגול, על גבי טופס הבחינה, תשובה אחת בלבד לכל שאלה. במקרה שיש יותר מתשובה נכונה אחת, יש להקיף את התשובה הנכונה המלאה והמזויינת ביותר. חובה לענות על כל השאלות. סמן את התשובה בצורה ברורה.

שאלה 1. יהיו $a < b$ שורשי הפולינום האופייני של נוסחת הנסיגה $f(n) = f(n-1) + 2f(n-2)$, ונתון $f(0) = f(1) = 1$. יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ כך שלכל n מתקיים $f(n) = \alpha a^n + \beta b^n$. אזי $(\beta b)/(\alpha a)$ שווה ל:

1. -1

2. 4

3. 1

4. -4

שאלה 2. יהי $\sim$ יחס שקילות על $\mathbb{N}$, כך שיש 4 מספרים טבעיים שונים i, j, k, m המקיימים: לכל $n \in \mathbb{N}$ יש $t \in \{i, j, k, m\}$ כך ש $n \sim t$. אזי:

1. $1 \leq |\{[n] : n \in \mathbb{N}\}| \leq 4$

2. $|\{[n] : n \in \mathbb{N}\}| = 4$

3. $|\{[n] : n \in \mathbb{N}\}| = \aleph_0$

4. $0 \leq |\{[n] : n \in \mathbb{N}\}| \leq 4$

שאלה 3. למר גייטס יש כמות בלתי מוגבלת של מטבעות מכל אחד מהסוגים הבאים: 5 סנט, 10 סנט, 50 סנט, 1 דולר. בכמה דרכים יוכל מר גייטס לבחור מתוכם 7 מטבעות?

1. 4^7

2. $\binom{7}{4}$

3. $7!/3!$

4. $\binom{10}{3}$

שאלה 4. נתון גרף שדרגות חלק מקודקודיו הן $4, 8, 6, 3, 5, 10, 7, \dots$. אזי:

1. בגרף יש מעגל אוילר.

2. בגרף אין מסלול אוילר.

3. אין מספיק נתונים בשאלה כדי לענות עליה.

4. בגרף אין מעגל אוילר אך יש מסלול אוילר.

שאלה 5. כמה מספרים יש בקבוצה $\{1, 2, \dots, 100\}$ שאינם מתחלקים באף אחד מהמספרים 3, 5, 7?

1. 45

2. 44

3. 56

4. 55

שאלה 6. נתון $|\{a_1, a_2, \dots, a_k\}| \leq \sqrt{k}$. אזי:

1. יש סתירה בנתון, כיון שבהכרח $|\{a_1, a_2, \dots, a_k\}| = k$.

2. תשובות (1) ו (4) שתייהן נכונות.

3. יש ערך שמופיע בסידרה $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ לפחות $\sqrt{k}$ פעמים.

4. הסידרה $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ מהווה מסלול המילטוני בגרף כלשהו בעל k קודקודים.

שאלה 7. לכל $n \in \mathbb{Z}$, תהי $A_n = \{x \in \mathbb{R} : x < n\}$. אזי:

1. לכל תת-קבוצה סופית F של $\mathbb{Z}$, $\bigcap_{n \in F} A_n$ היא אינסופית, אבל $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} A_n = \emptyset$.

2. לכל תת-קבוצה סופית F של $\mathbb{Z}$, $\bigcap_{n \in F} A_n$ היא אינסופית, ולכן $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ היא אינסופית.

3. יש תת-קבוצה סופית F של $\mathbb{Z}$ כך ש $\bigcup_{n \in F} A_n = \mathbb{R}$.

4. יש תת-קבוצה סופית F של $\mathbb{Z}$ כך ש $\bigcap_{n \in F} A_n = \emptyset$.

שאלה 8. יהיו A, B קבוצות כך ש $A \subsetneq B$. אזי:

1. $|A| \leq |B|$ אם ורק אם A, B שתייהן סופיות.

2. $|A| < |B|$.

3. $|A| \leq |B|$.

4. $|A| \leq |B|$ אם ורק אם A, B שתייהן אינסופיות.

שאלה 9. יהיו $f, g \in Z^Y, h \in Y^X$ כך ש $f \circ h = g \circ h$. אזי בהכרח:

1. אם $f \neq g$, אז h אינה על.

2. אם h חד-חד ערכית, אז $f = g$.

3. $f = g$.

4. f, g שתייהן על.

שאלה 10. סמן את הטענה הנכונה.

1. על קבוצה שבה 4 איברים יש בדיוק 5 יחסי שקילות.
2. אם R ו S הם יחסי שקילות, אז גם $R \cap S$ יחס שקילות.
3. אם $|A| = n$ אז אין יחס שקילות E על A כך ש $|E| = n$.
4. אם R ו S הם יחסי שקילות, אז גם $R \cup S$ יחס שקילות.

שאלה 11. נתבונן בקבוצות: $A_1 = \emptyset$, $A_2 = \{\emptyset\}$, $A_3 = \{\{\emptyset\}\}$, $A_4 = \{\emptyset, A_3\}$.

1. $A_4 \setminus A_1 \neq A_4$ או $A_1 \setminus A_3 \neq \emptyset$.
2. $A_3 \cap A_4 = A_1$ וגם $A_2 \in A_3$.
3. $A_1 \in A_4$ וגם $A_4 \subseteq A_3$.
4. $A_2 \cap A_4 = A_1$ וגם $A_1 \in A_2$.

שאלה 12. נסמן $c = |\mathbb{R}|$, $A = \{f \mid f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \text{ פונקציה}\}$, $B = \{g \mid g: \mathbb{Q} \rightarrow A \text{ פונקציה}\}$. למה שווה $|B|$?

1. $2^{(2^c)}$
2. $\aleph_0$
3. 2^c
4. c

בהצלחה!