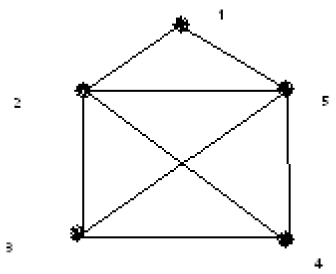
מתמטיקה בדידה 88-195 פרופסור מרגוליס
שבוע 9

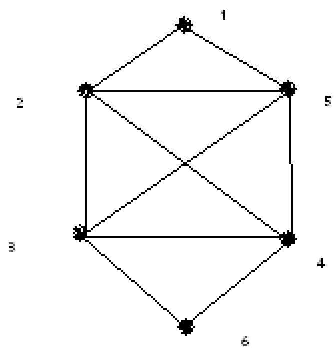
מעגלים ומסלולים של אוילר והמילטון

הגדרות : יהי $G=(V,E)$ גרף. מסלול (מעגל) שמבקר בכל צלע בדיוק פעם אחת נקרא מסלול (מעגל) אוילר.
מסלול (מעגל) שמבקר בכל קדקוד בדיוק פעם אחת נקרא מסלול (מעגל) המילטון.

דוגמאות של מסלולי אוילר

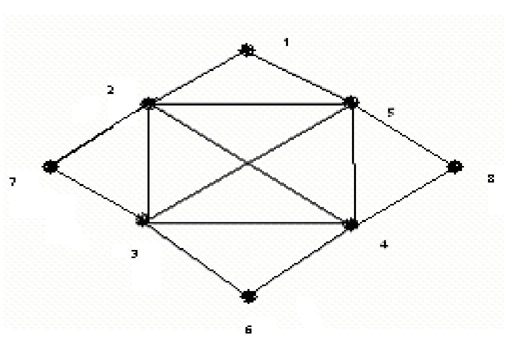


גרף 1



גרף 2

בגרף 1 יש מסלול אוילר $(3,2,4,5,2,1,5,3,4)$. בגרף 2 יש מעגל אוילר $(3,2,4,5,2,1,5,3,4,6,3)$. נראה שכל מסלול אוילר בגרף 1 צריך להתחיל ב-3 (או ב-4) ולהסתיים ב-4 (ב-3). בניגוד לזאת יש מעגל אוילר שמתחיל ומסתיים בכל קדקוד.



גרף 3

נראה שאין מסלול אוילר בגרף 3 אחרי המשפט הבא.

משפט אוילר יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר. ב- G יש מעגל אוילר אם ורק אם כל הדרגות בגרף זוגיות.

הוכחה כרגיל עלינו להוכיח שני כיוונים.
הכרחיות: נניח שקיים ב- G מעגל אוילר. יהי v קדקוד כלשהו ב G. כל מעבר של המעגל דרך v תורם 2 לדרגתו- צלע אחת לכניסה וצלע אחת ליציאה. מכיוון שהמסלול מבקר בכל צלע בדיוק פעם אחת ייספרו כל הצלעות שחלות ב- v בדיוק פעם אחת ולכן v בעל דרגה זוגית. נעיר שהטענה תקפה גם עבור הקדקוד הראשון במעגל כי סופרים 1 ביציאה הראשונה ממנו, 2 בכל פעם שחוזרים אליו ויוצאים ממנו, ולבסוף עוד 1 כשחוזרים אליו בסיום.
מספיקות: נניח כעת שלכל הקדקודים דרגה זוגית. צריכים לבנות מסלול אוילר. קודם כל צריכים את משפט העזר הבא.

משפט עזר יהי $G=(V,E)$ גרף שכל דרגותיו זוגיות. אז כל קדקוד ב- G שייך למעגל כלשהו.

הוכחה יהי v קדקוד ב- G. נצא מ- v ונטייל ב- G באופן כלשהו תוך כדי שמירת הכלל שלא לחזור על אותה צלע פעמיים. כיוון שמבקרים בכל צלע לכל היותר פעם אחת, התהליך חייב להסתיים. נניח שהתהליך מסתיים כשהגענו לקדקוד x ואי אפשר להמשיך. טוענים ש- $x=v$. אם $x\neq v$, אז כל מעבר של המסלול ב- x תורם 2 לדרגתו של x פרט לצעד האחרון שתרם 1 לדרגה של x. מכיוון שאי אפשר להמשיך, דרגת x היא אי-זוגית. זו סתירה להנחה שכל הדרגות ב- G זוגיות. לכן, $x=v$ ומצאנו מעגל שכולל את x כנדרש.

כעת, נחזור להוכחת המשפט. יהי v קדקוד כלשהו ב- G. לפי משפט העזר, קיים מעגל $C_1=(v,v_2,\ldots,v_k,v)$ שכולל את v. אם המעגל כולל את כל צלעות הגרף, סיימנו. אחרת, טוענים שיש קדקוד $u=v_i$ ב- C_1 וצלע $\{u,w\}$ שלא שייכת ל- C_1. יש שני מקרים לטענה הזו. אם C_1 לא משתמש בכל הקדקודים של G, יהי v' קדקוד ב- G שלא שייך ל- C_1. מכיוון ש- G הוא גרף קשיר, יש מסלול מ- v' לקדקוד $u\in C_1$ כך שאף אחד מהקדקודים ששייך למסלול הזה לא שייך ל- C_1. במקרה הזה, יהי w הקדקוד כך שהצלע $\{u,w\}$ שייכת למסלול. אם C_1 משתמש בכל הקדקודים של G, יש צלע $\{u,w\}$ כי C_1 לא משתמש בכל הצלעות של G. נתבונן בתת-גרף G_1 המתקבל מ- G לאחר הורדת כל הצלעות מ- C_1. גם בגרף G_1 כל הדרגות זוגיות (למה???). אז ממשפט העזר הקודם, יש מעגל $C_2=(u,u_2,\ldots,u_k,u)$

שמתחיל ומסתיים ב- u (פה, אנחנו צריכים לדעת שדרגתו של u חיובית וזה מה שהוכחנו לעיל).
מכיוון ש $u = v_i$ יש מעגל $C_2 = (v, v_2, \ldots, v_i = u, u_{2,}, \ldots, u, v_{i+1}, \ldots, v)$ ב- G שמשתמש ביותר צלעות מ- C_1. אם C_2 משתמש בכל הצלעות של G, סיימנו. אחרת, ממשיכים את התהליך הזה כדי למצוא מעגלים $C_3, C_4, \ldots$ ב- G עד שמוצאים מעגל שמשתמש בכל הצלעות בגרף בדיוק פעם אחת, זאת אומרת מעגל אוילר.

הערה : עכשיו יכולים לראות בבירור שיש מסלול אוילר בגרף 2 ואין מסלול אוילר בגרף 3 כי רק צריכים לספור דרגות. מההוכחה של משפט אוילר יכולים למצוא אלגוריתם יעיל כדי לבנות מעגל אוילר בגרף אם יש כזה.

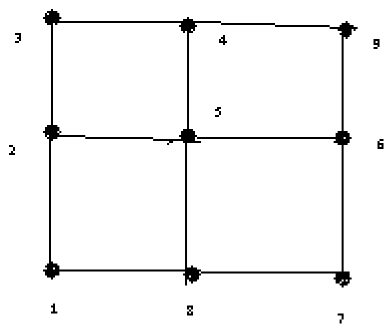
עכשיו נתייחס למקרה של מסלול אוילר שאינו מעגל.

מסקנה : יהי $G = (V, E)$ גרף קשיר. יש ב- G מסלול אוילר שאינו מעגל אם ורק אם יש בדיוק שני קדקודים אי-זוגיים $v, w \in V$. יתר על כן, כל מסלול אוילר מוכרח להתחיל מ- v (w) ולהסתיים ב- w (v).

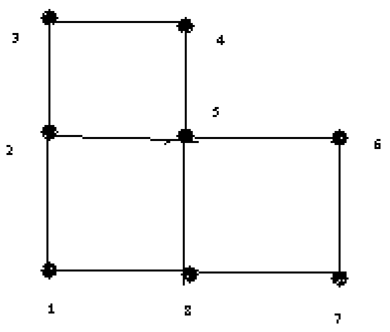
הוכחה : נניח שיש מסלול אוילר ב- G שמתחיל ב- v ומסתיים ב- w. אם $x \neq v, w$, אז כמו בהוכחת משפט אוילר, רואים שדרגת x היא זוגית. הדבר הראשון והאחרון שעושים מ- v הוא לצאת. ונובע מכך שדרגת v היא אי-זוגית. בפעם הראשונה שהמסלול מבקר את w זאת כניסה. בפעם האחרונה זאת גם כן כניסה. מכיוון שכל כניסה היא אי-זוגית, דרגת w היא אי-זוגית. לכן הוכחנו את הכיוון הזה.
נניח בכיוון ההפוך שיש בדיוק שני קדקודים אי-זוגיים $v, w \in V$. יהי $q \notin V$ קדקוד חדש ונוסיף צלעות $\{v, q\}$ ו- $\{q, w\}$ לגרף G. מקבלים גרף חדש G_1 כך שכל הדרגות G_1 זוגיות (למה??!). נובע ממשפט אוילר שיש ב- G_1 מעגל אוילר $(q, v, \ldots, w, q)$ ואז $(v, \ldots, w)$ הוא מסלול אוילר בגרף G.

הערות : מהמסקנה הזאת ניתן לראות שאין מסלול אוילר בגרף 3.
משפט אוילר ומסקנתו לא אומר דבר על בעיית גשרי קנינסברג כי "הגרף" שהגדרנו לבעיה הזאת הוא לא גרף לפי ההגדרה שלנו. לפי ההגדרה של גרף יש לכל היותר צלע אחת בין שני קדקודים כלשהם. יש מושג של "מולטי-גרף" כאשר מותר מספר כלשהו של צלעות בין שני קדקודים. קל לראות שהוכחת משפט אוילר נכונה במקרה של מולטי-גרף ולכן, אין פתרון לבעיית גשרי קנינסברג.

דוגמאות של מסלולי המילטון



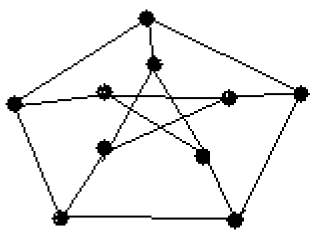
גרף 4



גרף 5

קל לראות שהמסלול $(1,2,3,4,5,8,7,6,9)$ הוא מסלול המילטון בגרף 4 והמעגל $(1,2,3,4,5,6,7,8,1)$ הוא מעגל המילטון בגרף 5.

תרגיל קשה : הראו שאין מעגל המילטון בגרף 4. הראו שאין מסלול המילטון בגרף 6.



גרף 6

הסטודנט שניסה לבצע את התרגיל לעיל יכול לראות שאין דרך ברורה כדי לדעת אם יש מעגל או מסלול המילטון בגרף נתון. בניגוד לאפיון הפשוט שמצא אוילר המאפשר להראות בקלות רבה האם בגרף כלשהו יש מעגל או מסלול אוילר, לא ידוע עד היום אפיון פשוט עבור הבעיה של מציאת מעגל המילטון. למיטב ידיעתנו האלגוריתם הטוב ביותר לבעיה הזאת הוא לרשום את כל המסלולים בגרף ולבדוק אם אחד מהם הוא מסלול המילטון. ברור שמספר המסלולים בגרף הוא מספר ענק והאלגוריתם הזה אינו יעיל. יש פרס של $1,000,000 למי שיכול להוכיח שיש אלגוריתם יעיל או שאין אלגוריתם לבעיה הזאת. לפרטים הסתכלו ב- *http://www.clay.math.org/* .

משפחות חשובות של גרפים

הגרף הריק

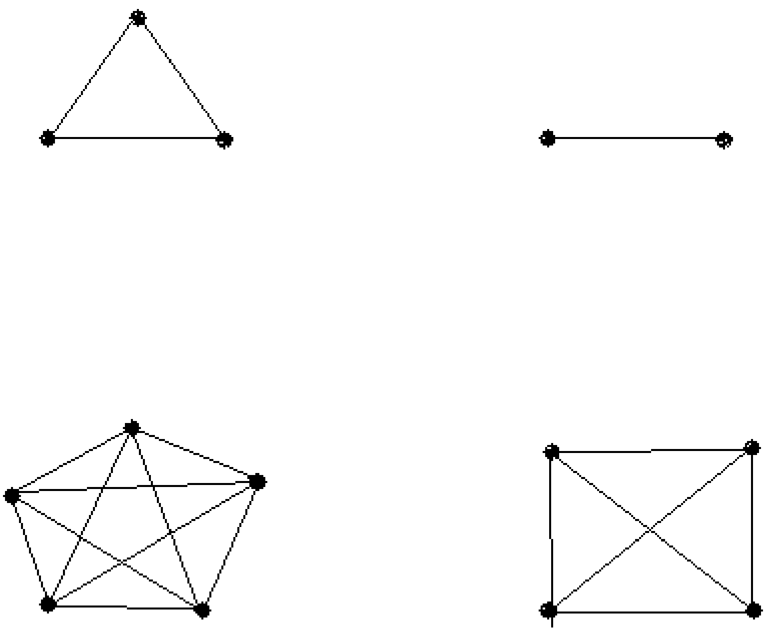
גרף ללא צלעות נקרא הגרף הריק. הגרף הריק על n קדקודים יסומן על ידי N_n.

הגרף השלם

גרף שבו מופיעות כל הצלעות האפשריות נקרא גרף שלם. הגרף השלם על n קדקודים יסומן על ידי K_n. הגרף K_n נקרא גם n-קליקה.

הוכחת המשפט הבא היא קלה מאוד.

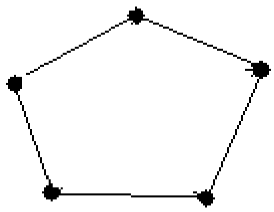
משפט: בגרף K_n יש $\frac{n(n-1)}{2}=\binom{n}{2}$ צלעות.



תרשימים של K_n, ל- $n=2,3,4,5$.

מעגלים

גרף בעל n קדקודים שנראה כמו מעגל נקרא גרף המעגל מסדר-n ויסומן על ידי C_n. פורמלית, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ ו-$E=\{\{v_1,v_2\},\ldots,\{v_{n-1},v_n\},\{v_n,v_1\}\}$.



תרשים של C_5

מסלולים

גרף בעל n קדקודים שהוא מסלול נקרא גרף המסלול (או פשוט מסלול) ויסומן על ידי P_n. פורמלית, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ ו-$E=\{\{v_1,v_2\},\ldots,\{v_{n-1},v_n\}\}$.