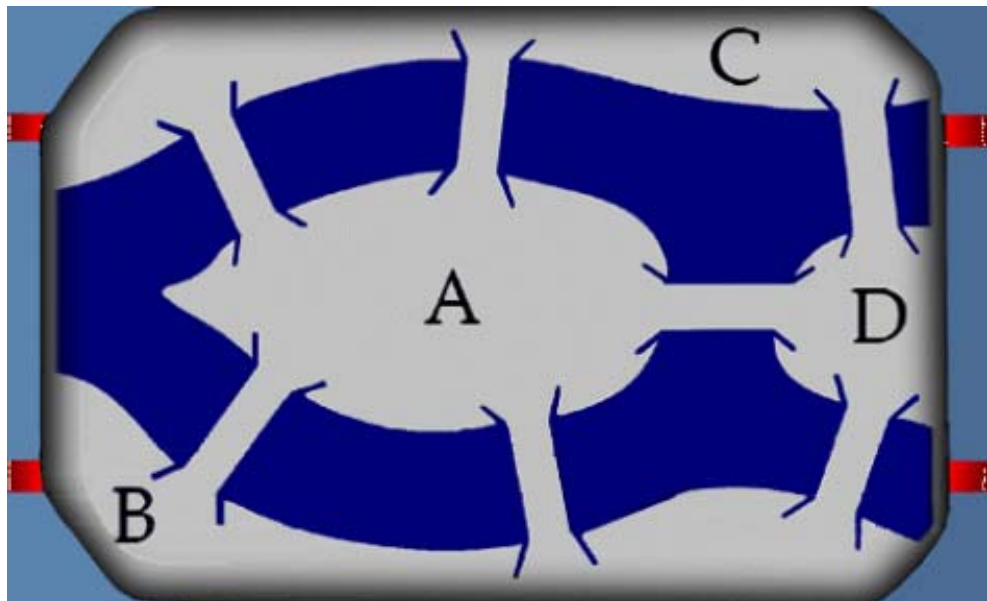
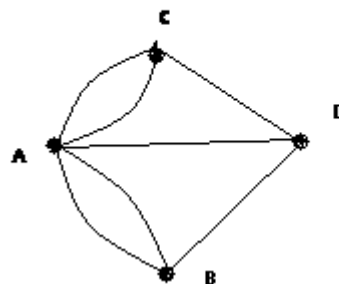


תורת הגרפים

בעיית הגשרים של קניגסברג (Konigsberg): הבעיה הראשונה בהיסטוריה של תורת הגרפים היא בעיית הגשרים של קניגסברג. העיר קניגסברג שוכנת על שתי גדותיו של נהר פרגל (Pregel) ועל שני איים הנמצאים באמצעו של הנהר. האיים מחוברים אל החוף וביניהם על ידי שבעה גשרים:



כמה מתושבי העיר שאלו את עצמם אם אדם יכול לעבור על כל גשר בדיוק פעם אחת. המתמטיקאי לאונרד אוילר הנחשב לאבי תורת הגרפים, הוכיח שהדבר אינו אפשרי. כדי לעשות זאת, הוא ייצג את חלקי העיר השונים והגשרים בעזרת גרף. כל אחד מחלקי העיר יוצג על ידי קדקוד, וגשר בין שני חלקים יוצג על ידי צלע:

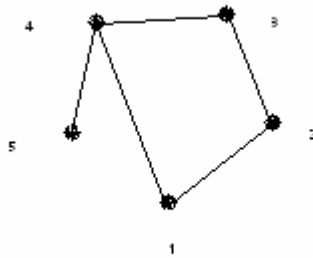


אוילר הוכיח שאפשר למצוא הליכה כזו אם ורק אם יש או 0 או 2 קדקודים אי-זוגיים בגרף. קדקוד נקרא אי-זוגי אם מספר השכנים שלו (דרך "גשרים") הוא אי-זוגי. נוכיח את המשפט הזה אחרי שנגדיר את המושגים הבסיסיים מתורת הגרפים.

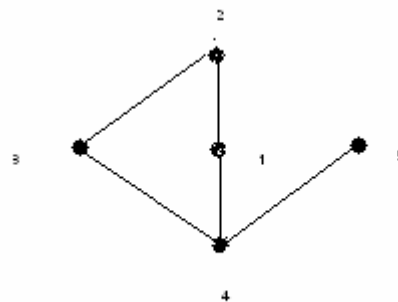
מונחים ומושגים בסיסיים מתורת הגרפים

הגדרה: תהי V קבוצה סופית ותהי E קבוצה של זוגות לא-סדורים מתוך V . הזוג $G = (V, E)$ נקרא **גרף סופי (לא מכוון)**. איברי הקבוצה V נקראים **קדקודים**. איברי הקבוצה E נקראים **צלעות**. צלע בין הקדקודים u, v נסמן על ידי $\{u, v\}$. נייצג את הגרף $G = (V, E)$ על ידי תרשים שבו לכל קדקוד $v \in V$ מתאימה לנקודה וכל צלע $u, v \in E$ נייצג על ידי קו בין u ל- v .

דוגמה: תהי $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ו- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$. התרשים של הגרף $G = (V, E)$ הוא:



תרשים שני של G הוא:



בדרך כלל, קשה לדעת מהו התרשים הטוב ביותר לייצג גרף נתון על ידי זוג $G = (V, E)$.

הגדרות: יהי $G = (V, E)$ גרף. נאמר שקדקוד $u, v \in V$ **שכנים** אם $\{u, v\} \in E$. **הדרגה** של קדקוד $v \in V$ היא מספר השכנים של v ונסמן $d(v)$. ברור ש-
 $d(v) = |\{w \mid \{v, w\} \in E\}|$.

המשפט הבא נקרא גם משפט "לחיצת ידיים" כי בקבוצת אנשים כלשהי מספר הידיים שיילחצו הוא זוגי.

משפט בגרף $G = (V, E)$ מתקיים $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

הוכחה נסכם את כל הדרגות של G . כל צלע $\{u, v\}$ תיספר פעמיים, פעם עבור u ופעם עבור v . השוויון נובע מזה.

מסקנה בגרף $G = (V, E)$ יש מספר זוגי של קדקודים שדרגתם אי-זוגית.

הגדרות: יהי $G = (V, E)$ גרף. סדרת קדקודים $(v_0, v_1, \dots, v_p)$ כך ש-
 $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ לכל $i = 0, 1, \dots, p-1$ נקראת **טיול**. אם כל הצלעות $\{v_i, v_{i+1}\}$ כולן
שונות זו מזו, הטיול נקרא **מסלול**. מסלול נקרא **פשוט** אם כל הקדקודים
שלו שונים זה מזה. **אורך** המסלול $(v_0, v_1, \dots, v_p)$ שווה ל- p . אם $v_0 = v_p$ אז
המסלול נקרא **מעגל**. המעגל נקרא **פשוט** אם כל הקדקודים שלו שונים זה
מזה חוץ מ- $v_0 = v_p$.

הגדרה: גרף $G = (V, E)$ נקרא **קשיר** אם יש טיול בין כל זוג קדקודים.

משפט עזר: יהי $G = (V, E)$. G קשיר אם ורק אם יש מסלול בין כל זוג קדקודים.

הוכחה: ברור שאם יש מסלול בין כל זוג קדקודים אזי G קשיר כי כל מסלול הוא טיול. נניח ש- G קשיר. אז יש טיול $(v = v_0, v_1, \dots, v_{p-1}, v_p = w)$ בין כל זוג $v, w \in V$. תהי $e_i = (v_i, v_{i+1}), 1 \leq i \leq n-1$ צלע בטיול. אם $i \neq j, e_i = e_j$ אז אפשר לסלק את e_i מהטיול ואנחנו מקבלים טיול כך שהאורך שלו מ- v ל- w יותר קטן. נובע שהטיול שהאורך שלו הוא הקטן ביותר מכל טיול מ- v ל- w הוא מסלול.

ייצוג גרף על ידי מטריצות שכנות

יהי $G = (V, E)$ גרף, כאשר $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ו- $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. אפשר לתאר את הגרף G בעזרת מטריצה במקום ציור. מטריצה זו נקראת **מטריצת השכנות** של הגרף. מספר השורות ומספר העמודות במטריצה שווה למספר הקדקודים של G . נרשום 1 במשבצת הנמצאים בשורה v_i ובעמודה v_j אם יש צלע בין v_i ל- v_j . אחרת נרשום 0 במשבצת זו.

לדוגמה, מטריצת השכנות של הגרף מעמוד 2 היא :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

הערות: שימו לב שמטריצת השכנות של גרף היא מטריצה סימטרית והאלכסון הראשי כולו אפסים כיוון שבגרף אין לולאות. מצד שני כל מטריצה ריבועית M סימטרית כך שהאלכסון הראשי כולו אפסים וכל ערך של M הוא 0 או 1 מייצגת גרף. $|V|$ מספר השורות של M ויש צלע בין שני קדקודים אם ורק אם יש 1 במשבצת שמתאימה להם. הדרגה של כל קדקוד v שווה לסכום הערכים בשורה שמתאימה ל- v .