

פתרון לנוסחת נסיגה מסדר שני עם מקדמים ליניאריים

הצורה הכללית של משוואה זאת היא:

$$(1) \quad n \geq 3, a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$$

יש שיטה נחמדה לפתור שאלות כאלו. קודם, אנו שואלים את עצמנו האם יש מספרים ממשיים $\alpha \neq 0$ כך ש $a_n = \alpha^n$ פותר הנוסחה (1)? הצבה של $a_n = \alpha^n$ לתוך (1) נותן ש $\alpha^n = A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2}$. במילים אחרות $\alpha^2 = A\alpha + B$. מסיקים ש $a_n = \alpha^n$ פותר את (1) בדיוק מתי ש α פותר המשוואה הריבועית **(המשוואה האופיינית)**

$$(2) \quad x^2 = Ax + B$$

זאת אומרת שאם α ו β הם שורשים של (2) אז גם $a_n = \alpha^n$ וגם $b_n = \beta^n$ שניהם פותרים (1). אם למשוואה האופיינית יש רק שורש אחד כפול אז

$$x^2 - Ax - B = (x - \alpha)^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2$$

כך ש $A = 2\alpha$ ו $B = -\alpha^2$. במקרה זה $a_n = n\alpha^n$ גם פותר (1), כי

$$\begin{aligned} Aa_{n-1} + Ba_{n-2} &= A(n-1)\alpha^{n-1} + B(n-2)\alpha^{n-2} \\ &= 2(n-1)\alpha^n - (n-2)\alpha^n = n\alpha^n = a_n \end{aligned}$$

משפט 1

נניח ש $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ סדרה שמקיימת (1) ו a_2, a_1 נתונים. יהיו α, β השורשים של המשוואה האופיינית (2). אז

1. אם $\alpha \neq \beta$, יש קבועים K_1, K_2 כך ש $a_n = K_1\alpha^n + K_2\beta^n$ לכל $n \geq 1$.
2. אם $\alpha = \beta$ יש קבועים K_3, K_4 כך ש $a_n = (K_3 + nK_4)\alpha^n$ לכל $n \geq 1$.

הוכחה: 1. נבחר K_1, K_2 כך ש $a_1 = K_1\alpha + K_2\beta$ וגם $a_2 = K_1\alpha^2 + K_2\beta^2$, ז"א ניקח

$$(3) \quad K_1 = \frac{a_1\beta - a_2}{\alpha(\beta - \alpha)}, K_2 = \frac{a_1\alpha - a_2}{\beta(\alpha - \beta)}$$

הטענה ש $a_n = K_1\alpha^n + K_2\beta^n$ בוואדי נכונה עבור $n = 1, 2$. נניח שהיא נכונה עבור כל $n \leq k$. אז

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= Aa_k + Ba_{k-1} \\ &= A(K_1\alpha^k + K_2\beta^k) + B(K_1\alpha^{k-1} + K_2\beta^{k-1}) \\ &= K_1\alpha^{k-1}(A\alpha + B) + K_2\beta^{k-1}(A\alpha + B) \end{aligned}$$

כיוון ש α, β פותרים המשוואה האופיינית

$$= K_1\alpha^{k+1} + K_2\beta^{k+1}$$

והתוצאה נובעת.

2. דומה. נשאר כתרגיל.

דוגמה (עליית מדרגות, המשך).

הסדרה של מספר הדרכים F_n לעלות n מדרגות ניתן על ידי

$$F_1 = 1, F_2 = 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

המשוואה האופיינית ניתנת על ידי

$$x^2 - x - 1 = 0$$

שני השורשים של פולינום זה הם

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

כך ש

$$F_n = K_1 \alpha^n + K_2 \beta^n$$

כאשר $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$. תנאי ההתחלה $F_1 = 1, F_2 = 2$ יחד עם (3) נותן ש

$$K_1 \alpha + K_2 \beta = 1$$

$$K_1 \alpha^2 + K_2 \beta^2 = 2$$

$$K_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}, K_2 = \frac{-\beta}{\sqrt{5}} \quad \text{סך הכול:}$$

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \alpha^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \beta^{n+1} \\ (4) \quad &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

היא הביטוי המדויק ל F_n . אולי זה נראה משונה כי F_n אמור להיות מספר שלם. בדוק

שהפיתוח לפי המשפט הבינומי נותן שכל הביטויים שמכילים $\sqrt{5}$ מצטמצמים, כך ש

$$F_n = \frac{1}{2^n} \left\{ \binom{n+1}{1} + 5 \binom{n+1}{3} + 5^2 \binom{n+1}{5} + \dots \right\}$$

גם זה מפתיע כי זה אינו ברור למה סכום של מקדמים בינומיים הוא מתחלק ב 2^n . שים לב:

כיוון ש $|\beta| < 1$, הביטוי השני ב(4) שואף ל 0 כאשר $n \rightarrow \infty$, כך ש $\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, היחס

הזהב.

במקום $F_1 = 1, F_2 = 2$ אפשר לבחור כל שני מספרים $F_1 = a_1$ ו $F_2 = a_2$ כתנאי התחלה.

אז חישוב ישיר יש

$$(5) \cdot K_1 = \frac{a_1\beta - a_2}{\alpha(\beta - \alpha)}, K_2 = \frac{a_1\alpha - a_2}{\beta(\alpha - \beta)}$$

שים לב: פתרון למשוואת נסיגה הוא ליניארית בתנאי ההתחלה. אם $F_1 = a_1$ ו $F_2 = a_2$ תנאי התחלה אם פתרון

$$F_n = K_1\alpha^n + K_2\beta^n$$

ואם $F_1 = a'_1$ ו $F_2 = a'_2$ תנאי התחלה שונים, אם פתרון

$$F_n = K'_1\alpha^n + K'_2\beta^n$$

אז הפתרון לאותו נסיגה אם תנאי התחלה $F_1 = a_1 + a'_1$, $F_2 = a_2 + a'_2$ ניתן על ידי:

$$F_n = (K_1 + K'_1)\alpha^n + (K_2 + K'_2)\beta^n$$

עובדה זאת נובעת מ(5).