

8: נוסחאות נסיגה

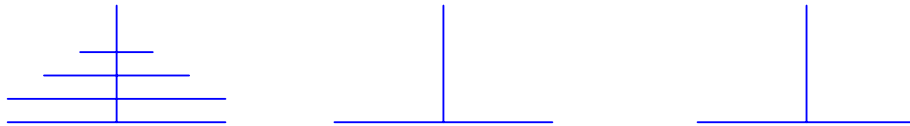
הרעיון: נסיגה היא מוגדרת על ידי סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שכל איבר תלוי באיברים הקודמים לו.

דוגמה: אם a_n הוא מספר התמורות של n איברים, הסדרה מוגדרת על ידי נוסחת נסיגה:

$$a_n = n \cdot a_{n-1}$$

כי יש n איברים לשים במקום הראשון, ו a_{n-1} דרכים לסדר שאר $n-1$ האיברים. כיוון ש $a_1 = 1$ חישוב ישיר נותן $a_n = n!$.

דוגמה: מגדלי הנוי (Hanoi):



$$(1) \quad a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$$
$$a_1 = 1$$

למה (1)? n הוא מספר הטבעות. אפשר להעביר $n-1$ העליונים למגדל השני ב a_{n-1} פעולות. אז אפשר להעביר הטבעת הגדולה למגדל השלישי, שלוקח פעולה אחת. אחר כך מעבירים ה $n-1$ הטבעות הקטנות יותר במגדל השני מעל הטבעת הגדולה וזה לוקח עוד a_{n-1} פעולות.

נוסחת הנסיגה הזאת יותר קשה לפתור. נסתכל בכמה דוגמאות ראשוניות. עבור $n=2$. $a_3 = 7, a_2 = 3$ אפשר לנחש $a_n = 2^n - 1$. הוכחה אינדוקטיבית מוכיח שהניחוש נכון. גם אפשר לוודאות שהצבה חוזרת לאחור נותן ש:

$$a_n = 2^k a_{n-k} + 2^k - 1$$

דוגמה: נחזור לבעיית המזכיר המבולבל. האם יש נוסחת נסיגה למספר הדרכים שהוא יכול להכניס המכתבים הממוענים למעטפות הממוענות כך שאין מכתב במעטפה הנכונה?

$$a_n = n - 1(a_{n-1} + a_{n-2})$$

$$a_1 = 0, a_2 = 1$$

שים לב שהמקדמים כאן הם לא ליניאריים, כי $n-1$ מופיע. $n-1$ תלוי כמוהן באיבר בסדרה a_n .

דוגמה: כמה תת-קבוצות יש לקבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$ כך שאין שני מספרים עוקבים. תשובה:
 $a_1 = 2, a_0 = 1$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

דוגמה: כמה דרכים ניתן לעלות n מדרגות אם בכל צעד ניתן לעלות מדרגה אחת או שתיים. תשובה: תהי a_n מספר המדרגות. ברור ש $a_1 = 1, a_2 = 2$. אז

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

הסדרה הזאת נקראת פיבונצ'י.

הוא בדרך כלל מתחילים אותה עם תנאי התחלה $a_1 = 1, a_0 = 1$, כך שהוא מתחיל:

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144...