

6: מקדמים בינומיים ויותר

הגדרה: המספר $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, כאשר $0 \leq k \leq n$, נקרא **מקדם בינומי** ומסומן על ידי

$$(1) \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

כפי שהוכחנו, (1) הוא מספר הדרכים לבחור k דברים מתוך n דברים ללא חזרות, שהסדר אינו חשוב.

במילים אחרות, $\binom{n}{k}$ הוא מספר תת-הקבוצות בנות k איברים של קבוצה של n איברים.

דוגמה: בכיתה יש 4 בנים ו 6 בנות. בכמה דרכים אפשר לבחור קבוצה של 3 בנים ו 2 בנות?

כיוון שבחירה של מספר בנים או בנות היא בחירה ללא חזרות שהסדר אינו חשוב, מספר הדרכים לבחור 3 בנים היא $\binom{4}{3}$. מספר הדרכים לבחור 2 בנות מה 6 היא $\binom{6}{2}$. יחד לפי

$$\text{עקרון המכפלה, מספר הדרכים לבחור קבוצה הוא } \binom{4}{3} \cdot \binom{6}{2} = 4 \cdot 15 = 60$$

$$\text{משפט 1: } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

הוכחה: שים לב ש $n - (n - k) = k$ כך ש

$$(2) \quad \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

זאת הוכחה אלגברית (ישיר מהנוסחה (1)). אבל גם ניתן לתת פירוש "קומבינטורי" טהור ל(2). כיוון שכל בחירה של תת-קבוצה עם k איברים היא גם בחירה של $n - k$ איברים (אותם האיברים שאינם נמצאים בתת-הקבוצה).

$$(3) \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad \text{משפט 2:}$$

הוכחה: (אלגברית) עלינו לבדוק ש

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

נכפיל שני הצדדים ב $\frac{(k-1)!(n-k-1)!}{(n-1)!}$ כך ש (3) נכון אם ורק אם

$$\frac{n}{k(n-k)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}$$

מתקיים. אבל זה נכון. מש"ל.

הוכחה: (קומבינאטורית) נספור מספר הדרכים לבחור k מתוך n האיברים בקבוצה S . יהי $x \in S$ איבר מסוים בקבוצה S . כל קבוצה של k איברים בין ה n או מכיל את x או אינו מכיל x . מספר תת-הקבוצות עם k איברים שמכילים את x היא זהה למספר תת-הקבוצות של $k-1$ איברים שנבחרים התוך מתוך ה $n-1$ איברים של S ששונים מ x . מספר תת-הקבוצות עם k איברים שאינם מכילים את x היא זהה למספר תת-הקבוצות של k איברים שנבחרים התוך מתוך ה $n-1$ איברים של S ששונים מ x . לכן מספר הבחירות של k מתוך n שווה למספר הבחירות של k מתוך $n-1$ + מספר הבחירות של $k-1$ מתוך $n-1$.

משפט 3: (הזהות הבינומית) לכל שני מספרים $a, b \in \mathbb{R}$, $d \geq 0$, מתקיים:

$$(4) \quad (a+b)^d = \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} a^k b^{d-k}$$

הוכחה: הינה דוגמה טובה לאינדוקציה. ש $d=1$ הזהות אומרת

$$a+b = \sum_{k=0}^1 a^k b^{1-k} = a^0 b^1 + a^1 b^0 = b+a$$

עכשיו השלב האינדוקטיבי, נניח ש (4) נכון לכל $d < n$ ונוכיח שהוא נכון גם עבור $d = n$.

$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1} (a+b) =$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-1-k} \right) (a+b) =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{k+1} b^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} =$$

$$k = k'-1$$

$$\sum_{k'=1}^n \binom{n-1}{k'-1} a^{k'} b^{n-k'} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j} \right) a^j b^{n-j} + a^n + b^n = \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j}
\end{aligned}$$

סך הכול, זה מש"ל.

תרגיל: תן הוכחה קומבינטורית לזהות.

מסקנה 1:

$$2^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \text{, הציבו } a=b=1.$$

ההבנה הקומבינטורית: סכום מספר תת-הקבוצות מגודל j עבור j בין 0 ו n שווה למספר תת-הקבוצות כלל שהוא 2^n .

מסקנה 2: אם נציב $a=1, b=-1$ במשפט הבינום, רואים ש:

$$0 = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots$$

הסבר הקומבינטורי: צד ימין הוא סכום מספר תת-הקבוצות של קבוצה S (עם n איברים) שיש להם מספר זוגי של איברים, מינוס מספר תת-הקבוצות של S שיש להם מספר אי-זוגי של איברים. (למה?). להראות ששני המספרים שווים נגדיר העתקה $1-1$ ועל g בין שתי הקבוצות האלו—שהם תת-קבוצות של $P(S)$.

$f: \{\text{תת-קבוצות זוגיות של } S\} \rightarrow \{\text{תת-קבוצות אי-זוגיות של } S\}$
 נבחר איבר "מיוחד" $x \in S$. לכל תת-קבוצה זוגית של A ,

$$f(A) = \begin{cases} A \cup \{x\} & x \notin A \\ A \setminus \{x\} & x \in A \end{cases}$$

קל לבדוק שהתמונה של כל קבוצה זוגית היא קבוצה אי-זוגית. כדי להראות ש f 1-1 ועל מספיק לבנות פונקציה g שהיא הופכית משמאל ומימין ל f . לשם זה נגדיר עבור A קבוצה אי-זוגית:

$$g(A) = \begin{cases} A \cup \{x\} & x \notin A \\ A \setminus \{x\} & x \in A \end{cases}$$

לא קשה לבדוק ש g הופכית מימין ומשמאל ל f .

7. משולש פסקל

שחושבים על המקדמים הבינומיים, התמונה הבאה היא מאוד שימושית. אנחנו מסדרים כל המקדמים הבינומיים בצורה של משולש:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & \\
 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & &
 \end{array}$$

מהמשולש ניתן לראות הרבה זהויות חשובות. דוגמה מיידית היא:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

הוא בדיוק שקול לעובדה כל מספר הוא הסכום של שני המספרים מעליו.

נסכם את הריבועים של המספרים בכל שורה

$$1^2 = 1$$

$$1^2 + 1^2 = 2$$

$$1^2 + 2^2 + 1^2 = 6$$

$$1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 = 20$$

$$1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = 70$$

רואים שהמספרים בצד ימין הם המספרים בעמודה האמצעית של המשולש. מכאן ניתן לנחש הזהות הבאה:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

להוכיח את זה צריכים הוכחה פורמאלית באינדוקציה או הסבר קומבינאטורי. ניתן הספר בכיתה.

עוד דבר מעניין לגבי משולש פסקל.

משפט 5 יהי $n \in \mathbb{N}$.

אם n זוגי אז

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \dots < \binom{n}{n/2} > \binom{n}{n/2+1} > \dots > \binom{n}{n}$$

אם n אי-זוגי אז

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \dots < \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}} > \dots > \binom{n}{n}$$

הוכחה: קל לבדוק ש- $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \frac{n-k+1}{k}$ לכל $0 \leq k \leq n$. לכן, $\binom{n}{k} > \binom{n}{k-1}$ אם ורק אם $\frac{n-k+1}{k} > 1$, כלומר $k < (n+1)/2$. זה מראה שהמקדמים הבינומיים עולים עד חצי השורה ואחר כך יורדים.

7. מקדמים מולטינומיים

אם $n_1, n_2, \dots, n_k$ הם מספרים $0 \leq n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ש- n מספר

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

נקרא **מקדם מולטינומי** ומסומן על ידי

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot \binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_1, n - n_1}$$

המקדם הבינומי הוא גם מולטינומי כי

המספרים האלו הם מספר הדרכים לחלק קבוצה ל- k תת-קבוצות כך שכל איבר נמצא באחד מתת-הקבוצות.