

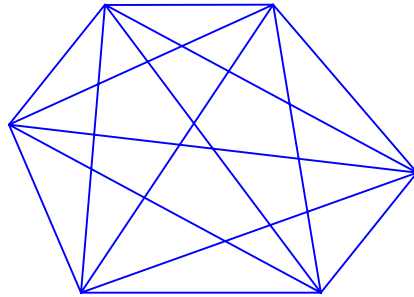
1: למה מתמטיקה בדידה?

כמה שאלות מעניינות.

1. האם כדאי לשחק את הלוטו? כמה דרכים יש לבחור 6 מספרים מתוך 49?

תשובה:
$$\frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}$$

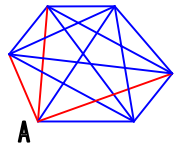
2. 6 אנשים נפגשים במסיבה, וכל אחד לוחץ ידיים עם כל אחד אחר. כמה לחיצות ידיים היו?



כל אחד יכול ללחוץ 5 ידיים:
$$\frac{6 \times 5}{2}$$

למה לחלק ב-2?

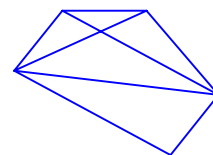
3. נגיד שחלק מהאנשים לחצו ידיים זה עם זה וחלק לא לחצו ידיים זה עם זה—הוכח שיש 3 אנשים (לפחות) שלחצו ביניהם ידיים או שיש 3 שלא לחצו ידיים ביניהם. ניקח אחד מה 6 אנשים. או שהוא לחץ ידיים עם 3 אנשים אחרים (לפחות) או שהוא לא לחץ ידיים עם 3 אחרים (גם לפחות!). בלי להגביל את הכלליות, נניח שהוא לא לחץ ידיים עם 3 אנשים אחרים, שנקרא להם 1, 2, 3—ראה התמונה. אם יש שניים מהאנשים האלו שלא לחצו ידיים אז יש לנו משולש של אנשים שלא לחצו ידיים—אחרת מר. 1, 2, 3 הם 3 אנשים שכן לחצו ידיים, וזה האפשרות הראשונה בתרגיל כך שבדקנו שאחד מהמצבים המבוקשים בתרגיל מתקיים.



4.

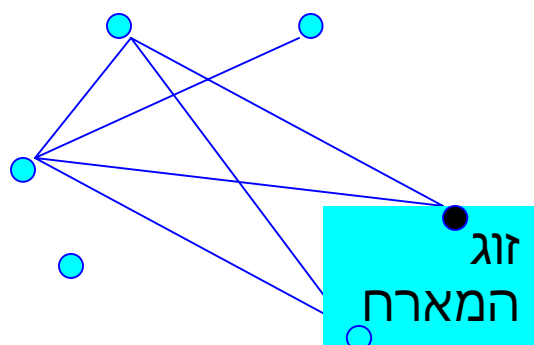
נניח שכמו ב-3, חלק מ-6 האנשים לחצו ידיים וחלק לא. נבדוק שלפחות 2 אנשים לחצו אותו מספר ידיים. אם כל אחד לחץ לפחות יד אחד, אז 6 אנשים לחצו בין 1 ל-5 ידיים. (למה 5 מספר המכסימלי של ידיים שאפשר ללחוץ?). עקרון שוברך היונים אומר שלפחות שני אנשים לחצו אותו מספר ידיים. לכן

מישהו היה חייב ללחוץ 0 ידיים כדי שכל אחד ילחץ מספר שונה של ידיים,
אבל אז לא ייתכן שהיה מישהו שלחץ 5 ידיים.



5. שלושה זוגות לוחצים ידיים ביניהם. יש זוג מארח בביתו ושני זוגות מבקרים.
אחרי ההיכרויות המארח שואל לכל 5 האחרים כמה ידיים לחצו והוא קיבל 5
תשובות שונות. כמובן שאף אחד לא לחץ את היד של בן\בת זוגו.

כמה ידיים לחצה אשתו של המארח?



התשובות שהמארח קיבל: 0,1,2,3,4, המארחת לחצה 2 ידיים.

6. שאלה קשה (פתרון בשימוש גרפים). אני קובע שני מספרים x ו y בין 2 ו 99.
אני מספר למר. מ. המכפלה של שני המספרים ואני מספר למר. ס.
הסכום של שני המספרים. אחר כך, השיחה הבאה מתקיים:

מ. אומר: "אני לא יודע x ו y ".

ס. אומר: "אני לא יודע את x ו y ואני יודע שאתה לא יודע x ו y ".

מ. אומר: "עכשיו אני יודע x ו y ".

וס. עונה לו: ועכשיו גם אני יודע x ו y "
שאלה: מה הם x ו y ?

7. דרך אגב, הסיכויים שבקבוצה של 60 אנשים לא יהיו 2 אנשים עם אותו יום
הולדת הוא (בערך) 1 ב 50000.

דף 2, שבוע 1, תשס"ד, מתמטיקה בדידה, יונתן בק, אוניברסיטת בר אילן

2: מושגי יסוד בתורת הקבוצות

קבוצה היא אוסף של **איברים** ללא סדר ביניהם. איבר מופיע רק פעם אחת בקבוצה.

$$S = \{1, \heartsuit, 2, 7\} = \{\heartsuit, 1, 7, 2\}$$

a הוא **איבר** של הקבוצה S אם a שייך ל S .
 $a \in S$: מסומן

לדוגמה $7 \in \{1, 3, 2, 7\}$.

אם b אינו איבר של הקבוצה S .

$b \notin S$: מסומן

לדוגמה $\heartsuit \notin \{1, 3, 2, 7\}$.

קבוצת **המספרים הטבעיים** $\mathbb{N}$:
המספרים: $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

קבוצת **המספרים השלמים** $\mathbb{Z}$:
 $\{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

קבוצת **המספרים הרציונאליים** $\mathbb{Q}$:
 $\left\{ q \mid q = \frac{n}{m}, n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$

קבוצת **המספרים הממשיים** $\mathbb{R}$ שמכילה $\mathbb{Q}$ וגם כל מיני מספרים לא רציונאליים כמו $\sqrt{2}$ ו π .

דוגמה להוכחה בדרך השלילה:

משפט 1: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

הוכחה: נניח בשלילה ש $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. דהיינו, יש מספרים $m \neq 0, n, m \in \mathbb{Z}$ כך ש $\frac{n}{m} = \sqrt{2}$.

נניח גם ש $\frac{n}{m}$ הוא הייצוג המצומצם של $\sqrt{2}$ בתור שבר, כלומר אין ל m ו n גורם משותף. נעלה את שני האגפים בריבוע ונקבל:

$$2m^2 = n^2 \Leftrightarrow 2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2$$

נובע ש n^2 הוא מספר זוגי, כי הוא שווה ל $2m^2$. אבל אז לא ייתכן ש n אי-זוגי כי אי-זוגי בריבוע (כלומר n^2) שווה אי-זוגי. זאת אומרת $n = 2k$ עבור מספר k . במילים אחרות

$$2m^2 = n^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

נחלק שני האגפים ב 2 לקבל $2k^2 = m^2$. לאותה סיבה ש n הייתה זוגית עכשיו רואים ש m זוגית—או ש n ו m מתחלקים ב 2. זאת סתירה להנחה ש n/m שבר מצומצם. שתי קבוצות A, B **שוות** אם ורק אם יש להן אותם איברים. נסמן זאת על ידי $A = B$. אחרת הן **שונות** $A \neq B$.

קבוצה A **מוכלת** ב B , או A **תת-קבוצה** של B אם ורק אם כל איבר של A שייך גם ל קבוצה B . נסמן זאת על ידי $A \subseteq B$ או $A \subset B$. שים לב: שני הסימונים מאשרים שוויון בין A ו B . אם A **אינה מוכלת** ב B נסמן $A \not\subseteq B$.

נאמר ש A **מוכלת ממש** ב B אם $A \subseteq B$ וגם $A \neq B$. נסמן זאת על ידי $A \subsetneq B$.

הקבוצות A ו B **זרות** אם אין להן איברים משותפים.

דוגמה: $\{\clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit\} \supsetneq \{\heartsuit, \diamondsuit\}$ וזה חזק יותר מלכתוב $\{\clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit\} \supseteq \{\heartsuit, \diamondsuit\}$ (למה?). גם $\{\clubsuit, \diamondsuit\}, \{\heartsuit, \spadesuit\}$ הן קבוצות זרות. כמו כן, $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$. למה $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$? ולמה $\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$?

תהיינה A ו B קבוצות. **החיתוך** של A ו B הוא $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$

דוגמה: $A = \{a, b, c, d\}, B = \{b, c, e\}$ אז:

$$A \cap B = \{b, c\}$$

הציור הזה נקרא **דיאגרמת ון**. **הקבוצה האוניברסאלית** שסימנה U היא הקבוצה המכילה את כל הקבוצות שבדיון. בדיאגרמת ון היא תסומן כמלבן.

האיחוד הוא $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$

ההפרש של A ו B הוא:

דוגמה: $A = \{a, b, c, d\}, B = \{b, c, e\}$ אז:

$$A \setminus B = \{a, d\},$$

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$$

הקבוצה ללא איברים נקראת **הקבוצה הריקה** ומסומנת $\{\}$ או $\emptyset$.
דוגמה:

$$\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}, \mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} = \emptyset, \mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

משפט 2: לכל קבוצה A ,

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$

2. $A \cup \emptyset = A$

3. $A \cap A = A$

4. $A \cup A = A$

5. $A \setminus A = \emptyset$

6. $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

משפט 3: A ו B הן קבוצות שוות כאשר לכל x , $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ או במילים אחרות:

$$A \subseteq B \text{ and } B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$$

כאן $\Leftrightarrow$ סימון קיצור "אם ורק אם"

משפט 4: כל שלוש קבוצות A, B, C מקיימות חוקים הבאים:

1. **חוק החילוף:**

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

2. **חוק הקיבוץ:**

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

3. חוק הפילוג:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

הוכחה: הוכחה בכיתה בשימוש משפט 3. להראות שוויון קודם בודקים ש:

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

ואחר כך:

$$A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

תרגיל: תהינה B, C קבוצות. אם לכל A $A \cup B = A \cup C$ וגם $A \cap B = A \cap C$ אז $B = C$.

תרגיל: 1. $A - B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$.

2. $A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

3. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

ההפרש $U - A$ מסומן ב $\bar{A}$ נקרא **המשלים** של A . כלומר $\bar{A} = U - A$. מהגדרת המשלים A' נובע ישירות:

1. $x \notin A \Leftrightarrow x \in \bar{A}$ 2. $\overline{(\bar{A})} = A$.

3. $\bar{\emptyset} = U$ 4. $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

5. $A \cup \bar{A} = U$ 6. $\bar{U} = \emptyset$.

הערה: ברור שהמשלים תלוי בקבוצה האוניברסאלית ואין משמעות להגדרת המשלים בלי לפרט מה הקבוצה האוניברסאלית.

משפט 5: **כללי דה-מורגן** תהינה $A, B \subset U$.

$$1. \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$2. \overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

תרגיל: **שוויון ההפרש-משלים**

$$1. A - B = A \cap \bar{B}$$

$$2. A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

תרגיל: אם לשתי קבוצות A ו B :

$$A \cup B = U \text{ and } A \cap B = \emptyset$$

$$\Rightarrow B = A'$$

ההפרש הסימטרי מוגדר:

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (A \cap B') \cup (B \cap A') \end{aligned}$$

קבוצת כל תת-הקבוצות של קבוצה A נקראת **קבוצת החזקה** של A והיא מסומנת $P(A)$.

דוגמה: $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$. $P(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

העצמה של קבוצה A היא מספר האיברים ב A , ומסומן $|A|$.

דוגמה: $|\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}| = 4$

המכפלה הישירה של שתי קבוצות A ו B מוגדר להיות $A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$.

דוגמה: אם $A = \{2,3,1\}, B = \{\heartsuit, \diamondsuit\}$ אז $A \times B = \left\{ \begin{aligned} &(2, \heartsuit), (2, \diamondsuit), (3, \heartsuit), \\ &(3, \diamondsuit), (1, \heartsuit), (1, \diamondsuit) \end{aligned} \right\}$

שים לב ש $A \times B \neq B \times A$, וגם שאם A ו B קבוצות סופיות, $|A \times B| = |A| \times |B|$.

תהי I קבוצה כך שלכל $i \in I$ נתון קבוצה A_i . **האיחוד על הקבוצות** $\{A_i\}_{i \in I}$ מאופיינת על ידי $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ אם ורק אם קיים אינדקס בקבוצת האינדקסים I ($i_1 \in I$) לפחות אחד, כך ש $x \in A_{i_1}$.