קורס תורת הקבוצות - אביב תש"ס

29 במאי 2000

פתרון תרגיל 9

1. נרצה לבחור לכל איבר ב-B אחת מתמונותיו ההפוכות. לשם-כך נגדיר: $X = \left\{f^{-1}(b) \,|\, b \in B\right\}$. אברי X אינם ריקים (זה שקול לכך ש-f על) וכן (תמיד נכון) $A = \cup X$. לכן קיימת פונקציית-בחירה c על X, $c : X \to A$. עתה נגדיר $g : B \to A$ ע"י $g(b) = c(f^{-1}(b))$. לכל $b \in B$, מתקיים $g(b) \in f^{-1}(b)$ ולכן $f(g(b)) = b$. מכאן נובע ש-g חח"ע.

2. ראשית, נוכיח טענות שימושיות כלליות לגבי הלמה של צורן: (ונגיד ש-f פונקצייה חלקית מ-A ל-B אם f פונקצייה, ואם $dom(f) \subseteq A \wedge range(f) \subseteq B$).

   (א) איחוד שרשרת של פונקציות הוא פונקצייה

   (ב) איחוד שרשרת של פונקציות חלקיות מ-A ל-B גם הוא כזה

   (ג) איחוד שרשרת של פונקציות חח"ע הוא פונקצייה חח"ע

   (א) אם C שרשרת של פונקציות, אזי ברור ש-$\cup C$קבוצת זוגות. כמו-כן, אם $\langle x, y_1\rangle, \langle x, y_2\rangle \in \cup C$ אז יש $f_i \in C$ כך ש-$\langle x, y_i\rangle \in f_i$. בה"כ, $f_1 \subseteq f_2$ (זו שרשרת) ואז מפני ש-f_2 פונקצייה נובע $y_1 = y_2$. כלומר, $\cup C$חד-ערכית, כלומר היא פונקצייה.

   (ב) ברור $dom(\cup C) = \cup\{dom(f) \,|\, f \in C\}$ וכן $Range\{\cup C) = \cup\{Range(f) \,|\, f \in C\}$.

   (ג) ההוכחה זהה לחלוטין ל-א' בהחלפת סדר האיברים בזוגות.

   עתה נגדיר לפי הרמז את $\mathcal{F}$ להיות אוסף הפונקציות החלקיות החח"ע מ-A ל-B. זו משפחה לא ריקה (כי הפונקצייה הריקה נמצאת בה), ולפי הטענה היא סגורה לאיחודים של שרשרות. לפי הלמה של צורן יש בה פונקצייה מקסימלית, f. אם $dom(f) = A$ אז סיימנו (כי f חח"ע כאיבר של $\mathcal{F}$, ואז $|A| \leq |B|$). אם f על אז סיימנו לפי שאלה 1, אבל ידוע לנו יותר מכך: למעשה אז f פונקצייה חח"ע מתת-קבוצה של A על B. לפיכך ההפוכה לה היא פונקצייה חח"ע מ-B על תת-קבוצה של A, כלומר $|B| \leq |A|$. אחרת, קיים $a \in A \setminus dom(f)$ וקיים $b \in B \setminus Range(f)$. נתבונן ב-$\hat{f} = f \cup \{< a, b >\}$. זו פונקצייה, כי a אינו בתחום של f, היא חח"ע כי b אינו בתמונת f, והיא פונקצייה חלקית מ-A ל-B מבחירת a, b. לפיכך $\hat{f} \in \mathcal{F}$ וזו סתירה למקסימליות f שם.

3. ראשית, הגדרה: יהא V מרחב וקטורי מעל שדה F. תת-קבוצה (לא בהכרח סופית) $A \subseteq V$ תיקרא תלוייה ליניארית אם קיימת $\{\vec{v}_i\}_{i=1}^n \subseteq A$ וקיימים סקלרים $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subseteq F$ לא כולם אפס כך ש-$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0}$. A תיקרא בלתי-תלוייה ליניארית אם אינה תלוייה ליניארית. (נשים לב שבמקרה בו A סופית זו בדיוק ההגדרה המוכרת). אם נגדיר $Sp(A) = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i \,|\, \{\vec{v}_i\}_{i=1}^n \subseteq A\,;\, \{\alpha_i\}_{i=1}^n \subseteq F\,;\, n \in \mathbb{N}\}$, כאשר $Sp(\emptyset) = \{\vec{0}\}$, (הכללת מושג הספן) אז ברור כי A ת"ל אםם קיים $\vec{v} \in A$ כך ש-$\vec{v} \in Sp(A \setminus \{\vec{v}\})$.

   עתה נגדיר את $\mathcal{F}$ להיות קבוצת התת-קבוצות של V שהן בת"ל. $\mathcal{F}$ לא ריקה, כי הקבוצה הריקה נמצאת בה. מדוע $\mathcal{F}$ סגורה לאיחודים של שרשרות? נניח כי $C \subseteq \mathcal{F}$ שרשרת, ויהיו $\{\vec{v}_i\}_{i=1}^n \subseteq \cup C$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subseteq F$ כך ש-$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0}$, נוכיח כי כל הסקלרים הם אפס, כך ש-$\cup C$ תהיה בת"ל ולכן ב-$\mathcal{F}$. ברור שקיימים $A_i \in C$ כך ש-$\vec{v}_i \in A_i$. הסדר של השרשרת משרה סדר מלא על הקבוצה הסופית $\{A_i\}_{i=1}^n$, ובפרט יש בסדר זה איבר מקסימלי, שנסמן אותו A_0. אזי $\vec{v}_i \in A_0$ לכל i, ו-$A_0 \in C \subseteq \mathcal{F}$, כלומר A_0 בת"ל, ולכן כל הסקלרים הם אפס כפי שרצינו.

יהא, עתה, (לפי הלמה של צורן) $B \in \mathcal{F}$ איבר מקסימלי. B בת"ל לפי הבנייה, ולכן אם נוכיח שהיא פורשת אז היא תהיה בסיס. נחזור על הטיעון המוכר, מדוע קבוצה בת"ל מקסימלית היא בסיס: נניח כי B אינה פורשת. אזי קיים $\vec{u} \in V \setminus Sp(B)$. ואז $B \cup \{\vec{u}\}$ גם היא בת"ל, כי אם יש בה קבוצה סופית ת"ל, אז קבוצה זו תכיל את $\vec{u}$ באופן לא טריביאלי (אחרת B היתה ת"ל) ואז $\vec{u}$ היה ב-Span של B בסתירה להנחה.

4. נשים לב כי $A \times (B\dot{\cup}C) = (A \times B)\dot{\cup}(A \times C)$ (כשוויון בין קבוצות). בפרט ברור שהעצמות שוות.