קורס תורת הקבוצות - אביב תש"ס

1 ביוני 2000

פתרון תרגיל 8

1. נראה כי יש "מעט" פונקציות רציפות. לשם-כך נשים לב, שמפני שהרציונליים צפופים בממשיים, פונקציה רציפה נקבעת ע"י ערכיה ברציונליים, ונתבונן בהעתקת הצמצום $\mathcal{F} : C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ (כאשר $C(A)$ הוא הסימון המקובל לאוסף הפונקציות הממשיות הרציפות על קבוצה A):

$$\mathcal{F}(f) = f \restriction_{\mathbb{Q}}$$

הפונקציה הזו חח"ע, כי אם $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$ אז לכל ממשי x, $f(x) = g(x)$: נבחר סדרה $\{r_i\}_{i=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{Q}$ המתכנסת ל-x (קיימת בגלל צפיפות הרציונליים בממשיים), ואז לכל i יהיה $f(r_i) = (\mathcal{F}(f))(r_i) = (\mathcal{F}(g))(r_i) = g(r_i)$ ומרציפות f, g:

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f(r_i) = \lim_{i\to\infty} g(r_i) = g(x)$$

לפיכך $f = g$.

מכאן, $|C(\mathbb{R})| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = |\left(2^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}}| = \aleph$. מצד שני, אם נתאים לממשי a את הפונקצייה הקבועה $f_a(x) \equiv a$, שהיא בוודאי רציפה, זו התאמה חח"ע ולכן $|\mathbb{R}| \leq |C(\mathbb{R})|$. ממשפט קנטור-שרדר-ברנשטיין נקבל $|C(\mathbb{R})| = \aleph$.

2. ראשית נוכיח את העובדות הבאות עבור זוג פונקציות $f : A \to B$; $g : B \to C$ והרכבתן $g \circ f$:

   - אם f ו-g חח"ע, אז גם $g \circ f$ חח"ע
   - אם f ו-g על, אז גם $g \circ f$ על

במקרה הראשון, לכל $x, y \in A$ אם $x \neq y$ אז $f(x) \neq f(y)$ כי f חח"ע, ולכן $g(f(x)) \neq g(f(y))$ כי g חח"ע.

במקרה השני, לכל $c \in C$ קיים $b \in B$ כך ש-$g(b) = c$ (כי g על) ואז קיים $a \in A$ כך ש-$f(a) = b$ (כי f על), ואז $g(f(a)) = g(b) = c$ ולכן c בתמונת $g \circ f$.

עתה, בהנתן $f : A \to B$ חח"ע ועל, גם $f^{-1} : B \to A$ חח"ע ועל, ואז נתבונן בהעתקה $\mathcal{F} : S_A \to S_B$ המוגדרת לכל $\pi \in S_A$ ע"י: $\mathcal{F}(\pi) = f \circ \pi \circ f^{-1}$. לפי הטענה הקודמת, ברור ש-$\mathcal{F}$ מוגדרת היטב, וצריך רק להוכיח שהיא חח"ע ועל. לשם-כך נצביע על הפונקצייה ההפוכה (קל לוודא): $\mathcal{F}^{-1} : \S_B \to S_A$ שהיא $\mathcal{F}^{-1}(\sigma) = f^{-1} \circ \sigma \circ f$.

3. ראשית, נוכיח את הרמז: $|N_{nm}| = |N_n \times N_m|$, באינדוקציה על m. עבור $m = 0$, הטענה אומרת כי לכל n: $|\emptyset| = |N_n \times \emptyset|$ וזה נכון אפילו כשוויון של הקבוצות. עתה נשים-לב, כי ניתן להציג: $N_{n(m+1)} = N_{nm}\dot{\cup}\{nm, nm+1, \ldots, nm+(m-1)\}$. כמו-כן ניתן להציג: $\mathrm{N_n} \times N_{m+1} = N_n \times (N_m\dot{\cup}\{m\}) = N_n \times N_m\dot{\cup}N_n \times \{m\}$. לפי הנחת האינדוקציה, $|N_{nm}| = |N_n \times N_m|$, וברור ש-$|\mathbb{N}_m \times \{m\}| = |\{nm, \ldots, nm+(m-1)\}|$ (נעתיק $< k, m > \to nm + k$). מפני שהאיחודים זרים, סיימנו.

נציג סימון נוסף: $S_n = S_{N_n}$, ועתה נוכיח באינדוקציה כי: $|S_n| = \mathrm{N}_{\mathrm{factorial}(n)}$. עבור $n = 0$, $S_n = \{\emptyset\}$ (הפונקצייה הריקה בלבד) ו-$factorial(n) = 1$, כך שהכל בסדר. עתה, נגדיר העתקה $\mathcal{F}\S_{n+1} \to S_n \times N_{n+1}$ כדלקמן: $\mathcal{F}(\pi) = < \pi', t >$ כך ש-$\pi(t) = n + 1$ (והוא מוגדר היטב כי π חח"ע ועל) וכך ש-$\pi' \in S_n$

$$\pi'(i) = \begin{cases} \pi(i) & i \neq t \\ \pi(n+1) & i = t \end{cases}$$

קל לבדוק שאכן זו פרמוטציה על N_n. ההעתקה הזו חח"ע ועל כי היא הפיכה. ההפוכה לה נתונה ע"י:

$$(\mathcal{G}(\pi',t))(i) = \begin{cases} n+1 & i=t \\ \pi'(t) & i=n+1 \\ \pi'(i) & otherwise \end{cases}$$

בנייה זו אנלוגית לבנייה המשמשת להוכחת עקרון שובך היונים. לסיום, נשתמש בהנחת האינדוקציה ברמז, ובהגדרת $factorial(n)$ כדי לקבל:

$$|S_{n+1}| = |S_n \times N_{n+1}| = |N_{factorial(n)} \times N_{n+1}| = |N_{(n+1)factorial(n)}| = |N_{factorial(n+1)}|$$

כלומר (בסימון הרגיל לפונקציית העצרת של מספרים): $|S_n| = (n+1)!$.

4. נראה שני פתרונות המבוססים על מושג נקודות השבת של פרמוטציה. נגדיר ראשית פונקצייה $Fix : S_A \to \mathcal{P}(A)$ ע"י $Fix(\pi) = \{a \in A \,|\, \pi(a) = a\}$ (אברי $Fix(\pi)$ נקראים נקודות השבת של π). נקודד קבוצות חלקיות A של $\mathbb{N}$ על-ידי פרמוטציות π_A כך שאם A, B שונות אז $Fix(\pi_A), Fix(\pi_B)$ יהיו שונות, מה שיבטיח מיד שההתאמה חח"ע.

(א) מפני ש-$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \{0\} \dot\cup \mathbb{N} \times \{1\}| = |\mathbb{N} \times \{0,1\}|$, מספיק להוכיח $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \le |S_{\mathbb{N}\times\{0,1\}}|$ (שאלה 2). נוכיח זאת על ידי $\mathcal{F} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to S_{\mathbb{N}\times\{0,1\}}$

$$(\mathcal{F}(A))(n,\varepsilon) = \begin{cases} (n,\varepsilon) & n \in A \\ (n, 1-\varepsilon) & n \notin A \end{cases}$$

$\mathcal{F}$ מוגדרת היטב, כי ברור מההגדרה כי $\mathcal{F}(A) \circ \mathcal{F}(A) = id_{A\times\{0,1\}}$, ולכן הפונקציה $\mathcal{F}(A)$ הפכית לעצמה, בפרט חח"ע ועל. כמו-כן ברור: $Fix(\mathcal{F}(A)) = A \times \{0,1\}$, ולכן $\mathcal{F}$ חח"ע.

(ב) בכיוון אחר נוכיח כי לכל קבוצה $B \subseteq \mathbb{N}$ כך ש-$|B| \neq 0,1$, קיימת $\sigma_B \in S_B$ כך ש-$Fix(\sigma_B) = \emptyset$.

ראשית, במקרה בו $B = \mathbb{N}$, ניקח פרמוטציה שתחליף מספר זוגי בעוקב האי-זוגי שלו. במקרה בו $B = N_n, n \ge 2$ נגדיר:

$$\sigma_n(i) = \begin{cases} i+1 & 0 \le i \le n-2 \\ 0 & i = n-1 \end{cases}$$

במקרה הכללי, נשים לב, ראשית, שאם $f : A \to B$ חח"ע ועל, ו-$\pi \in S_A$ אז $Fix(f \circ \pi \circ f^{-1}) = f[Fix(\pi)]$ ובפרט קיום פרמוטציה ללא נקודות שבת על שקול לקיום פרמוטציה כזו על B. מכאן סיימנו, כי כל תת-קבוצה של $\mathbb{N}$ מעוצמה לפחות 2 היא שוות עוצמה לאחת הקבוצות שנדונה.

עתה, נגדיר את ההתאמה. נסמן: $P = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \,|\, |\mathbb{N} \setminus A| \ge 2\}$ ואז נגדיר $\mathcal{F}\ P \to S_{\mathbb{N}}$:

$$\mathcal{F}(A) = id_A \cup \pi_{\mathbb{N}\setminus A}$$

זו אכן פרמוטציה (איחוד זר של פרמוטציות), והיא קובעת בדיוק את אברי A לפי הבנייה. לפיכך, $|P| \le |S_{\mathbb{N}}|$. אבל $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus P = \{\mathbb{N} \setminus \{i\}\}_{i\in\mathbb{N}} \cup \{\mathbb{N}\}$ ולכן ההפרש בן-מנייה. ב-P ניתן לזהות סדרה, ולכן היא שוות-עצמה ל-$\mathcal{P}(\mathbb{N})$, כלומר:

$$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \le |S_{\mathbb{N}}| \le |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \;\Rightarrow\; \aleph_0! = \aleph$$