קורס תורת הקבוצות - אביב תש"ס

8 במאי 2000

פתרון תרגיל 7

1. $A \cup B = (A-B) \cup (B-A) \cup (A \cap B)$, זהו איחוד זר, והקבוצה $\{A-B, B-A, A \cap B\}$ היא סופית, ולכן סופית דדקינד (ע"פ ההגדרה באתר זה). לכן, לפי שאלה 2, $A \cup B$ סופית דדקינד.

2. נוכיח את הטענה הבאה: תהי A קבוצה סופית דדקינד שכל איבריה זרים זל"ז וסופיים דדקקינד. אז $\cup A$ סופית דדקינד.

   (א) נשתמש בעובדה הבאה: תת-קבוצה אינסופית של $\mathbb{N}$ היא בת מניה.

   (ב) הוכחה:נניח בשלילה ש-$\cup A$ אינה סופית דדקינד. אז יש פונקציה חח"ע $f : \mathbb{N} \to \cup A$. נגדיר $B = \{a \in A : \exists_{n \in \mathbb{N}}(f(n) \in a)\}$. נגדיר פונקציה $g : B \to \mathbb{N}$ ע"י: $g(a) = \min\{n | f(n) \in a\}$. אז:

      i. g חח"ע: יהיו $a_1 \neq a_2$ ב-B. אז, $f(g(a_i)) \in a_i$ ומכיוון ש-a_1 ו-a_2 זרות, $f(g(a_1)) \neq f(g(a_2))$ ולכן $g(a_1) \neq g(a_2)$.

      ii. תמונת g אינסופית כי אחרת מועתקת תת-קבוצה אינסופית של $\mathbb{N}$ לתוך אחד מאברי A, בסתירה להיותו דדקינד.

   (ג) על סמך (i) ו-(ii), B שוות עצמה לתת-קבוצה אינסופית של $\mathbb{N}$ ולכן בת מניה, בסתירה לכך ש-A סופית דדקינד.

   (ד) בלא הנחת הזרות, הבעיה קשה הרבה יותר, ואני איני יודע לפתרה.(נ.)

3. תהי A קבוצה כך שקיימת $B \subset A$, $A \neq B$ עבורה $|B| = |A|$. נראה ש-B אינה סופית דדקינד: ממשפט קנטור-שרדר-ברנשטיין, יש $x \in A - B$, כך ש-$|A - \{x\}| = |A|$. יש פונקציה חח"ע ועל $f : A \to A - \{x\}$. נגדיר ברקוסיה פונקציה חח"ע $g : \mathbb{N} \to A$ ע"י (1) $g(0) = x$ ו-(2) $g(n+1) = f(g(n))$. נראה ש-g מוגדרת היטב וחח"ע:

   (א) f היא פונקציה מ-A לעצמה, ולכן אם $g(n)$ קיים, אז גם $g(n+1)$ קיים. לכן, באינדוקציה, g מוגדרת היטב.

   (ב) בהנתן $n > k$ נראה ש-$g(k) \neq g(n)$: הפונקציה f^k היא חח"ע ולכן מספיק להוכיח ש-$g(0) \neq g(n-k)$. אבל, $g(n-k) = f(g(n-k-1) \in A - \{x\}$, ואילו $g(0) = x$, ולכן g חח"ע.

4. A היא קבוצה סופית דדקינד, ו-V_n היא קבוצת הסדרות באורך n, ללא חזרות, של איברים מ-A.

(א) $C = V_n$ סופית דדקינד: $C \subset B = \cup_{n\in\mathbb{N}} V_n$, ולכן, מ-(ב) C תת-קבוצה של קבוצה סופית דדקינד. לכן, C סופית דדקינד.

(ב) $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ סופית דדקינד: נניח בשלילה שיש $f : \mathbb{N} \to B$ חח"ע. יהי $g : \mathbb{N} \to A$ השרשור $f(0)f(1)f(2)...$ (לכל i, $f(i)$ היא סדרה סופית של איברים מ-A. לכן ניתן לשרשר את כל הסדרות האלו ולקבל סדרה אינסופית של איברים מ-A. סדרה זו היא הפונקציה g). תהי $U \subset \mathbb{N}$ הקבוצה $U = \{n|\forall_{k<n} g(n) \neq g(k)\}$. נראה ש-$U$ אינסופית: נניח בשלילה ש-$|U| = j$. אז, מכיוון שהסדרות ב-V_n הן ללא חזרות, לכל $m \in \mathbb{N}$ נקבל $f(m) \in V_n$ ל-$n \leq j$ כלשהו. אבל יש רק מספר סופי של סדרות עד אורך j ב-j איברים, בסתירה לחד חד ערכיות f. לכן, U אינסופית ולכן בת מניה. אבל אז, מכיוון ש-$g|_U$ חד חד ערכית, A אינה קבוצת דדקינד.