קורס תורת הקבוצות - אביב תש"ס

12 במאי 2000

פתרון תרגיל 6

1. תחילה מספר סימונים שימושיים: תהא $f:X\to Y$ פונקצייה, ויהיו $A\subseteq X,\ y_0\in Y,\ B\subseteq Y$.

- תמונת A ע"י f מוגדרת כ- $f[A]=\{f(x)\,|\,x\in A\}=\{y\in Y\,|\,\exists x\in A: f(x)=y\}$
- התמונה ההפוכה של y_0 מוגדרת כ- $f^{-1}(y_0)=\{x\in X\,|\,f(x)=y_0\}$
- התמונה ההפוכה של B מוגדרת כ- $f^{-1}[B]=\{x\in X\,|\,f(x)\in B\}=\cup_{y\in B}f^{-1}(y)$

(א) נגדיר $\mathcal{F}:A^B\to\mathcal{P}(B)$ ע"י $\mathcal{F}(f)=f^{-1}(1)$, וכן $\mathcal{G}:\mathcal{P}(B)\to A^B$ ע"י $\mathcal{G}(S)=1_S$, כש-1_S היא הפונקצייה האפיינית של הקבוצה S, המוגדרת לפי:

$$1_S(x)=\begin{cases}1 & x\in S\\ 0 & x\in B\setminus S\end{cases}$$

וקל לראות ש- $F\circ G=id_{\mathcal{P}(B)},\ G\circ F=id_{A^B}$, ולכן ששתי הפונקציות חח"ע ועל, כלומר הקבוצות שוות-עצמה. (id_X היא פונקציית הזהות של הקבוצה X).

(ב) תהא $f:B\to C$ חח"ע. נגדיר $\mathcal{F}\ \mathcal{P}(B)\to\mathcal{P}(C)$ חח"ע ע"י $\mathcal{F}(S)=f[S]$. לפי ההגדרה אם $S\subseteq B$ אז $f[S]\subseteq C$, ולכן $\mathcal{F}$ מוגדרת היטב. היא חח"ע, כי אם $S\neq T$ אז בה"כ קיים $x\in S\setminus T$ ואז לכל $y\in T$, $x\neq y$ ולכן (f חח"ע) $f(x)\neq f(y)$, ולכן $f(x)\notin f[T]$, ולכן $f[S]\neq f[T]$, כלומר $\mathcal{F}(S)\neq\mathcal{F}(T)$.

(ג) נניח כי B_2 לא ריקה, וכי $f_i:A_i\to B_i$ חח"ע. נסמן $A_1'=f_1[A_1]$, ואז $f_1:A_1\to A_1'$ חח"ע ועל, ולכן קיימת לה הפוכה חח"ע ועל $g_1:A_1'\to A_1$. נבחר $b\in B_2$ קבוע, ונגדיר $\mathcal{F}\ A_1^{B_1}\to A_2^{B_2}$ ע"י:

$$(\mathcal{F}(h))(x)=\begin{cases}f_2(h(g_1(x))) & x\in A_1'\\ b & x\in A_2\setminus A_1'\end{cases}$$

כדי לוודא שאכן $\mathcal{F}$ חח"ע, יהיו $h,k\in A_1^{B_1}$ שונות. בפרט קיים $y\in A_1$ כך ש-$h(y)\neq k(y)$. נסמן $x=f_1(y)$, ואז לפי הגדרה $x\in A_1'$, ולכן $(\mathcal{F}(h))(x)=f_2(h(g_1(x)))=f_2(h(g_1(f_1(x))))=f_2(h(y))$, כי g_1 הפוכה ל-f_1 על A_1'. באותה צורה, $(\mathcal{F}(k))(x)=f_2(k(y))$. עתה, מפני ש-$f_2$ חח"ע נובע ש-$\mathcal{F}(h)\neq\mathcal{F}(k)$.

2. ראינו בתרגיל 4 כי $|\{0,\dots,9\}^{\mathbb{N}}|=|\mathbb{R}|$. שימוש בפיתוחים בינאריים במקום עשרוניים עם אותה הוכחה בדיוק היה נותן $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}|=|\mathbb{R}|$. מכאן לפי תרגיל 5 ומשפט מן ההרצאה, $|R^{\mathbb{N}}|=\left|\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}\right|=|\{0,1\}^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})}|=|\{0,1\}^{\mathbb{N}}|=|\mathbb{R}|$.

3. מפני ש-$|\mathbb{Q}|=|\mathbb{N}|$, מספיק לבדוק את השאלה לגבי $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$. ובכן, תהינה $A,B\subseteq\mathbb{Q}$, חסומות כך שיש לכל אחת נקודת הצטברות יחידה (ב-$\mathbb{R}$). אזי אם $A\cap B$ אינסופית, אז היא בת-מנייה, ולכן ניתן לבחור בה סדרה. זו סדרה חסומה ולכן יש לה נקודת הצטברות, שתהיה משותפת לקב' נק ההצטברות של A,B. בפרט, אם נק' ההצטברות של A,B שונות אז החיתוך שלהן סופי. לפיכך, נבחר לכל ממשי $x\in\mathbb{R}$ תת-קבוצה $A_x\subseteq\mathbb{Q}$ חסומה, שיש לה נק' הצטברות יחידה - x עצמה. (במקרה בו x רציונלי, ניקח $A_x=\{x\}$). אז הקבוצה $\{A_x\,|\,x\in\mathbb{R}\}$ היא מעוצמת הרצף (אם לכל 2 איברים שונים בה יש חיתוך סופי הם בוודאי שונים), והיא עומדת בתנאים. מפני שעוצמת $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ כולה היא עוצמת הרצף, אין לצפות לתת-קבוצה מעוצמה גדולה יותר עם התכונה המבוקשת.

הערה: אין צורך באקסיומת הבחירה כדי לפתור את השאלה. ניתן להגדיר את הקבוצות A_x באופן הבא: נסדר את הרציונליים בסדרה, $\mathbb{Q}=\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, ואז לכל ממשי $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ נבחר סדרה קנונית $f_x:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ שמתכנסת אליו באופן הבא: $f_x(n)$ יהיה האיבר הראשון בסדרת כל הרציונליים הקרוב ל-x לפחות כדי $\frac{1}{n+1}$. ברור שסדרה זו מוגדרת היטב ושהיא מתכנסת ל-x. לפיכך, תמונתה חסומה ו-x היא נק' ההצטברות היחידה שלה. נגדיר, לפיכך, $A_x=f_x[\mathbb{N}]$.