# קורס תורת הקבוצות - אביב תש"ס

8 במאי 2000

# פתרון תרגיל 5

1. ,

(א) נגדיר את ההעתקה הבאה $\gamma : A^{B\cup C} \to A^B \times A^C$ - תהי $A \leftarrow B \cup C :$ $f \in A^{B\cup C}$. אז, $\gamma(f) =< f|_B, f|_C >$. $\gamma$ היא חח"ע כי אם $f \neq g$, אז קיים $x \in B \cup C$ כך ש-$f(x) \neq g(x)$. ב.ה.כ $x \in B$, ואז $f|_B \neq g|_B$ ולכן $\gamma(f) \neq \gamma(f)$. $\gamma$ היא על כי כל זוג פונקציות מ- $B$ ומ-$C$ ניתן לאחד (וזאת בשל זרות $B$ ו-$C$).

(ב) $A^C \times B^C \to (A \times B)^C$ $\gamma$ תהיה ההעתקה: לכל $< f, g >\in A^C \times B^C$, נגדיר $(\gamma(< f, g >))(x) =< f(x), g(x) >$. $\gamma$ חח"ע כי אם $< f_1, g_1 >\neq< f_2, g_2 >$ אז, בה"כ, $f_1(x) \neq f_2(x)$, ל-$x$ מסויים, ואז $(\gamma(< f_1, g_1 >))(x) \neq (\gamma(< f_1, g_1 >))(x)$. $\gamma$ על כי כל פונקציה ב-$(A \times B)^C$ ניתנת לפירוק לקואורדינטות.

(ג) כאן נגדיר את $\gamma : (A^B)^C \to A^{B\times C}$ ע"י $(\gamma(f))(< x, y >) = (f(x))(y)$. בדיקת החח"ע והעל דומות לסעיפים הקודמים.

2. ראשית, $|A^N| = |\mathcal{P}(N)|$ (לא נוכיח זאת כאן). כעת, נשתמש במשפט קנטור-שרדר-ברנשטיין:

(א) $|A| \leq |N|$, ולכן $|A^N| \leq |N^N|$.

(ב) $|N^N| \leq |\mathcal{P}(N)^N| = |A^{N\times N}| = |A^N|$.

3. יהיו $f : A \to B$ ו-$g : B \to A$ חד חד ערכיות ואפיניות. ($f$ ו-$g$ הן פשוט העתקות כיווץ). מהוכחת משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין, יש פונקציה חח"ע ועל $h : A \to B$ וחלוקה זרה $A = A_1 \cup A_2$ כך ש-$h|_{A_1} = f$ ו-$h|_{A_2} = g^{-1}$. נגדיר $B_i = h(A_i)$ ל-$i = 1, 2$. אז, ברור ש-$B = B_1 \cup B_2$ הוא איחוד זר, וכן ש-$A_i \sim B_i$ ל-$i = 1, 2$.