קורס תורת הקבוצות - אביב תש"ס

8 במאי 2000

פתרון תרגיל 4

1. חשבון עצמות:

(א) תהינה A_1, A_2 בנות מנייה, $f_i : A_i \to \mathbb{N}$ חח"ע ועל. נראה כי יש $f : A_1 \cup A_2 \to \mathbb{N} \times \{0,1\}$ חח"ע. אז $A_1 \cup A_2$ תהיה שוות-עצמה לתת-קבוצה של קבוצה בת-מנייה (וברור כי היא אינסופית) ולכן בת-מנייה. את f נגדיר ע"י:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in A \\ f_2(x) & x \in B \setminus A \end{cases}$$

וקל לבדוק שהיא חח"ע ועל.

(ב) (בסימונים אחרים) נניח כי $f_i : A_i \to B_i$ חח"ע ועל ($i = 1,2$), ונגדיר $f : A_1 \times A_2 \to B_1 \times B_2$ ע"י $f(< x_1, x_2 >) =< f_1(x_1), f_1(x_1) >$. מתוך תכונות זוג סדור נובע שאכן f חח"ע, וקל לראות שהיא גם על.

(ג) נסמן ב-A'' את תמונת הסדרה (כלומר קבוצת האיברים בסדרה), וכן $A' = A \setminus A''$. אם B סופית, אז ניתן לזהות אותה עם סדרה $\{b_j\}_{j=0}^{m-1}$ של איברים שונים, ואז נגדיר התאמה $f : A \to A \cup B$ ע"י:

$$f(x) = \begin{cases} b_n & x = a_n,\, n < m \\ a_{n-m} & x = a_n,\, n \geq m \\ x & x \in A'' \end{cases}$$

וקל לבדוק שאכן f פונקציה מוגדרת היטב, חח"ע ועל. אם B אינסופית, אזי לפי (א) קיימת $g : A' \to A' \cup B$ חח"ע ועל, ואז נגדיר:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in A' \\ x & x \in A'' \end{cases}$$

(ד) מפני ש-$[0,1] = (0,1) \cup \{0,1\}$ והאיחוד זר, מספיק להצביע על סדרה בקטע הפתוח. אפשר לקחת, למשל, $a_n = \frac{1}{n+2}$.

2. הישר והמישור:

(א) הפונקציה $\tan$ היא פונקציה מונוטונית עולה במובן החזק (נגזרתה חיובית ממש) בקטע $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, בפרט היא חח"ע. היא שואפת ל-$\pm\infty$ בקצות הקטע, ורציפה. ממשפט ערך הביניים נובע שהיא על $\mathbb{R}$.

(ב) כל שני קטעים פתוחים הם שווי-עצמה, ומספיק לקחת פונקציה ליניארית. ניקח, למשל, $f : (0,1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ המקיימת: $f(x) = \pi(x - \frac{1}{2})$. שוויון העצמות בין $[0,1), (0,1)$ ברור כמו ב-1.(ד).

(ג) נסמן $I = I_0 \dot\cup I_1$ כש-I_0 הן כל הסדרות שאינן נגמרות בסדרת 9, ו-I_1 היתר. נתוני השאלה הם שיש התאמה חח"ע ועל בין I_0 ובין $[0,1)$, ושיש התאמה חח"ע ועל בין $I_1 \setminus \{\underline{9}\}$ ובין תת-קבוצה של $\mathbb{Q}$. לפיכך ברור ש-$I_1 \setminus \{\underline{9}\}$ סופית או בת-מנייה, ולכן גם I_1 בעצמה. I_0 מכיל את הסדרה $\{.1, .11, .111, .1111, \dots\}$, ולכן מ-1.(ג) נקבל $|I| = |I_0 \dot\cup I_1| = |I_0| = |[0,1)|$.

(ד) נגדיר $f : I^2 \to I$ חח"ע ועל ע"י:

$$(f(\underline{a},\underline{b}))_n = \begin{cases} a_{n/2} & n \in 2\mathbb{N} \\ b_{(n-1)/2} & n \in 2\mathbb{N}+1 \end{cases}$$

וקל לבדוק שהיא חח"ע ועל.

(ה) מסעיפים (א),(ב),(ג) נובע $|\mathbb{R}| = |I|$. מסעיף 1.(ב) נסיק מכאן שגם $|\mathbb{R}^2| = |I^2|$. ראינו כרגע $|I| = |I^2|$. מטרנזיטיביות שוויון עצמות סיימנו.