קורס תורת הקבוצות - אביב תש"ס

8 במאי 2000

פתרון תרגיל 3

1. לפי אקסיומת הזיווג, הקבוצה $C=\{A,B\}$ קיימת. עתה קיימת $\cup C = A\cup B$ לפי אקסיומת האיחוד.

2. קבוצות סופיות:

(א) ללא הגבלת הכלליות נניח ש-$A=N_n$, ונוכיח את הטענה באינדוקציה: עבור $n=1$, אין מה להוכיח. נניח את הטענה ל-n, ונוכיח ל-$n+1$. לפי הגדרה $N_{n+1}=N_n\cup\{n\}$. תהא B תת-קבוצה של N_{n+1}. נוכל לסמן אז $B=B'\dot{\cup}A'$, כש-$B'\subseteq \mathrm{N_n}$ ו-A' היא או ריקה או שווה ל-$\{n+1\}$. אז $|B|=|B'|+|A'|\le |N_n|+1=|N_{n+1}|$. החסם על $|B'|$ התקבל מהנחת האינדוקציה. סופיות B מתקבלת בצורה דומה.

(ב) זו מסקנה מיידית מ-(א).

(ג) שוב, באינדוקציה על n: במקרה $n=1$ אין מה להוכיח (אין פונקציות חח"ע ועל בין הקבוצה הריקה וקבוצה לא ריקה). עתה נניח את התוצאה ל-n, ונניח $B=N_{n+1}$, ו-$A\subsetneq B$, ונניח בשלילה שיש התאמה חח"ע ועל $f:B\to A$. יהא $x\in A$. במקרה בו $f(x)=x$, $f\restriction_{B\setminus\{x\}}$ היא התאמה חח"ע ועל בין $B\setminus\{x\}$ ובין $A\setminus\{x\}$ - סתירה. אחרת, תהא $h:A\to A$ ההחלפה בין x לבין $f(x)$. נגדיר $g=h\circ f$, ונחזור למקרה הקודם, עבור הפונקציה g.

3. ראשית, נגדיר $C=A\cup B$. קיומה מובטח לפי סעיף 1. עתה, נשים לב ש-$C\times C\subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(C))$, ולכן קיים לפי אקסיומות החזקה וההפרדה. לסיום, נשתמש בהפרדה כדי לקבל את $A\times B\subseteq C\times C$.