קורס תורת הקבוצות - אביב תש"ס

8 במאי 2000

פתרון תרגיל 2

1. אנו מסתמכים על משפט קנטור:

(א) זהו פשוט משפט קנטור: לא קיימת $f : A \to \mathcal{P}(A)$ על. (קיום פונקציה חח"ע ברור: ניקח $f(x) = \{x\}$).

(ב) הנחנו כי A קבוצה. לפיכך כל תת-קבוצה שלה היא קבוצה (הפרדה), ולכן $\mathcal{P}(A) \subseteq A$.

(ג) מ-(ב) נובע קיום פונקציה חח"ע מ-$\mathcal{P}(A)$ ל-A (פונקציית ההכלה, המקיימת $f(x) = x$). לפיכך קיימת לה פונקציה הפוכה מתמונתה על $\mathcal{P}(A)$, שנוכל להרחיב לכל A (למשל כקבועה מחוץ לתמונה). זו סתירה ל-(א).

2. וגם כאן.

(א) נניח A קבוצה מעצמה λ. אזי עצמת $\mathcal{P}(A)$ גדולה יותר (משפט קנטור) וסיימנו.

(ב) לכל $\lambda \in C$, קיים $\delta \in C$ כך ש-$\lambda < \delta$. כמו-כן, $\delta \subseteq D$ ולכן $\lambda < \delta \leq |D|$.

(ג) אם C היתה קבוצת כל העצמות האינסופיות היה בה בפרט איבר מעוצמה $|D|$. C לא היתה חסומה (לפי (א)), וזו סתירה ל-(ב).