קורס תורת הקבוצות - אביב תש"ס

8 במאי 2000

פתרון תרגיל 1

1. אם $x = x'$ וגם $y = y'$ אז השוויון $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{x'\},\{x',y'\}\}$ הוא אמת לוגית. בכיוון ההפוך, נניח את השוויון האחרון. $\{x\} \in \{\{x'\},\{x',y'\}\}$ ולכן או $\{x\} = \{x'\}$ או $\{x\} = \{x',y'\}$. בכל מקרה, יהיה $x' \in \{x\}$ ולכן $x = x'$. מהיקפיות נובע $x = y \Leftrightarrow \{x\} = \{x,y\}$. לכן $x = y$ שקול לכך שלזוג הסדור יש איבר יחיד, ולכן $x' = y' \Leftrightarrow x = y$. הוכחנו כבר $x = x'$. לכן או ש-$x = y = x' = y'$ או ש-$y \neq x = x' \neq y'$. רק המקרה השני מעניין. במקרה זה, נשים לב ש-$\{x',y'\} \in \{\{x\},\{x,y\}\}$ אך $\{x',y'\} \neq \{x\}$ כי y' נמצא בקבוצה אחת אך לא בשנייה. לכן $\{x',y'\} = \{x,y\}$, ואז $y' \in \{x,y\}$. $y' \neq x$, ולכן $y' = y$, וסיימנו.

2. נשים לב ש-$A \triangle B$ הוא קבוצת כל אברי $A \cup B$ הנמצאים בקבוצה אחת בדיוק מבין A, B. בצורה אחרת - זו קבוצת אברי $A \cup B$ הנמצאים במספר איזוגי של קבוצות מבין A, B.

   (א) מכאן ברור ש-$(A \triangle B) \triangle C$ היא קבוצת אברי $A \cup B \cup C$ הנמצאים במספר זוגי של קבוצות מבין A, B, C, וברור שזהו גם אפיון של אברי $A \triangle (B \triangle C)$.

   (ב) עבור $U = \emptyset$, ברור: $A \triangle \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = (A) \cup (\emptyset) = A$, ומ-ד' ברור גם להיפך.

   (ג) ניקח $A' = A$, ואז אין אף איבר ששיך למספר איזוגי מבין A, A, כמובן, ולכן $A \triangle A = \emptyset$.

   (ד) האפיון לעיל, וגם ההגדרה בדף התרגיל, הם סימטריים, בהנחה שאיחוד הוא סימטרי, וזה ברור.

3. פונקציות:

   (א) נניח ש-f מקיימת לכל $x \leq 0$, $f(x) = x^2 sin(x)$. אז מרציפות f ברור כי לכל $x \leq 0$, $\{f(y) | y < x\} = \mathbb{R}$. מפני שברור כי אם $x' \leq x$ אז $(\phi(f))(x) \subseteq (\phi(f))(x')$, אז ל-$f$ כזו יהיה $(\phi(f))(x) = \mathbb{R}$ לכל x. לכן ברור שיש פונקציות רבות המקיימות $\phi(f) \equiv \mathbb{R}$, ובפרט ϕ אינה חח"ע.

   (ב) בוטלה

   (ג) ראינו כבר חלק מהרעיונות המתאימים:

      i. שאלה זו כבר פתרנו.

      ii. בפרט, נגדיר את f ע"י:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sin(x) & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

      וברור שהיא רציפה.

      iii. לא תיתכן f כזו מונוטונית. למשל, אם היא מונוטונית עולה, אז לכל $x < y$, $f(x) \leq f(y)$, ולכן $(\phi(f))(x) \subseteq (-\infty, f(x)] \neq \mathbb{R}$. אם היא מונוטונית יורדת, אז נקבל $(\phi(f))(x) \subseteq [f(x), \infty) \neq \mathbb{R}$.