קורס תורת הקבוצות - אביב תש"ס

15 ביוני 2000

פתרון תרגיל 11

.1

(א) יהי $x \in B$. אזי $(x,x) \notin <_B$ כי $<_B \subseteq <_A$ שאינו מכיל את (x,x). בנוסף, אם $x \neq y \in B$ אז מתקיים (בדיוק) אחד מבין $(x,y) \in <_A, (y,x) \in <_A$. מפני ש-$(x,y),(y,x) \in B \times B$ נובע שבדיוק אחד מבין $(x,y),(y,x)$ נמצא ב-$<_B$ ולכן מתקיימת טריכוטומיה. טרנזיטיביות $<_B$ מוכחת באופן דומה ונובעת מטרנזיטיביות $<_A$.

(ב) תהא $C \subseteq B$ לא ריקה. אזי, בפרט, $C \subseteq A$ ולכן קיים $c \in C$ כך שלכל $x \in C \setminus \{c\}$, $c <_A x$. אבל מפני ש-$c, x \in B$ נובע כי לכל $x \in C \setminus \{c\}$ מתקיים גם $c <_B x$ ולכן c הוא גם מינימום של C יחסית לסדר $<_B$.

.2

(א) לכל $x \in A \cup B$, $(x,x) \notin <_A \cup <_B$ מהגדרת סדר. כמו-כן, A, B זרות ולכן $(x,x) \notin A \times B$. לכן $(x,x) \notin <_{A \cup B}$. אם $x, y \in A \cup B$ שונים, אז אם שניהם ב-A או שניהם ב-B אז הם ניתנים להשוואה מפני ש-$<_A, <_B$ סדרים מלאים. אם אחד ב-A והשני ב-B אזי הם ניתנים להשוואה כי $A \times B \subseteq <_{A \cup B}$. אם $x <_{A \cup B} y <_{A \cup B} z$ אז חלוקה למקרים לגבי שייכות x, y, z ל-A, B מראה שבכל מקרה $x <_{A \cup B} z$.

(ב) תהי $C \subseteq A \cup B$ לא ריקה, ונגדיר $C_A = C \cap A$. אם $C_A \subseteq A$ לא ריקה אז יש לה איבר מינימאלי בסדר $<_A$ שנסמן c, וברור $c \in A$. אבל אז לכל $x \in C \setminus \{c\}$, אם $x \in A$ אז $(c,x) \in <_A \subseteq <_{A \cup B}$ ואחרת $c \in A, x \in B$ ולכן $c <_{A \cup B} x$. אחרת (C_A ריקה) $C \subseteq B$ ולכן יש לה איבר מינימאלי בסדר $<_B$. מפני שכל אברי C הם אברים של B זהו גם איבר מינימאלי של C בסדר $<_{A \cup B}$ (שמכיל את $<_B$).

(ג) שוב ברור $((a,b),(a,b)) \notin <_{A \times B}$. אם $(a,b),(a',b') \in A \times B$ אז אם $a \neq a'$ אז הם ניתנים להשוואה כי אז או $a <_A a'$ או $a' <_A a$. אחרת ($a = a'$), אם $b \neq b'$ אז הם שוב ניתנים להשוואה ואחרת הם שווים. אם $(a,b) <_{A \times B} (a',b') <_{A \times B} (a'',b'')$ אז בפרט $a \leq_A a' \leq_A a''$. אם לפחות אחד הוא אי-שויון אזי $a < a''$ וסיימנו. אחרת, $a = a' = a''$, ואז חייב להיות $b <_B b' <_B b''$ ולכן $b <_B b''$ ולכן ($a = a''$) $(a,b) <_{A \times B} < (a'',b'')$.

(ד) תהא $C \subseteq A \times B$ לא ריקה. נסמן $C_A = \{a \in A \,|\, \exists b \in B : (a,b) \in C\}$ (ההטלה של C על הקואורדינטה הראשונה). אזי $C_A \subseteq A$ לא ריקה, ולכן יש לה איבר ראשון בסדר $<_A$, שנסמן a_0. נגדיר, עתה, $C_B = \{a_0\} \times B \cap C = \{b \in B \,|\, (a_0,b) \in C\} \subseteq B$ זו לא קבוצה ריקה כי לכל אברי C_A יש "בני-זוג" ב-B לפי הגדרה. בפרט, יש לה איבר ראשון בסד ר $<_B$, שנסמן b_0. אז ברור $(a_0,b_0) \in C$. כמו-כן, לכל $(a,b) \in C \setminus \{(a_0,b_0)\}$, $a \in C_A$ ולכן $a_0 \leq_A a$ (בחירת a_0). אם $a_0 <_A a$ אז גם $(a_0,b_0) <_{A \times B} (a,b)$. אחרת $a = a_0$ ואז $b \in C_B$. מפני שאז גם $b \neq b_0$ מבחירת b_0 נובע $b_0 <_B b$ ולכן $(a_0,b_0) <_{A \times B} (a,b)$.

3. נסמן: 1 - הסודר בן איבר אחד, 2 - הסודר בן שני איברים, ω - הסודר האיזומורפי לטבעיים בסדר הרגיל. אז קל לבדוק:

(א) $1 + \omega = \omega$ (נזיז כל איבר ב-1), אולם $\omega + 1 \neq \omega$ (בסדר הראשון יש איבר יחיד שאין לו קודם מיידי ובסדר השני שניים).

(ב) $\omega \cdot 2 = \omega$ (נתאים את (n, ε) ל-$2n + \varepsilon$ וזו התאמה שומרת סדר) אולם $\omega \cdot \omega \neq \omega$ (שוב יש שני איברים ללא קודם מיידי).

.4

(א) תהא $(A,<)$ קבוצה סדורה היטב, ויהי $a \in A$. נגדיר: $C_a = \{x \in A \,|\, a < x\}$. אם a איננו איבר מקסימלי של A, אזי C_a לא ריקה, ולכן יש לה איבר מקסימלי, שנסמן a^+. מההגדרה ברור $a < a^+$. כמו-כן, אם היה $y \in A$, $a < y < a^+$, אז בפרט היה $y \in C_a$ (כי $a < y$) ואז $y < a^+$ סותר את היות a^+ מינימאלי ב-C_a. אם a מקסימאלי אז ברור שאין לו עוקב.

(ב) נסמן $A' = \{a \in A \,|\, \exists a' \in a : a < a'\}$ (כלומר קבוצת כל איברי A שאינם מקסימליים). ברור כי $A \setminus A'$ היא או ריקה או בת איבר אחד. נבנה, עתה, $f : A' \to \mathbb{Q}$ שומרת סדר. אז בפרט f תהיה חח"ע, ונקבל ש-A' בת מנייה או סופית ולכן גם A. כדי להגדיר את f, נשים לב שלפי סעיף (א), לכל $a \in A'$ קיים עוקב $a^+ \in A$. a, a^+ ממשיים ולפי הגדרת סדר מושרה, $a < a^+$ בסדר הרגיל של הממשיים. לפי צפיפות הרציונליים בממשיים, נוכל לבחור לכל $a \in A'$ מספר רציונלי $f(a)$ כך ש-$f(a) \in (a, a^+)$. f שומרת סדר, כי אם $a < b$ איברים ב-A אז $b \in C_a$ ולכן $a^+ \leq b$, מבחירת $f(a), f(b)$ נובע: $f(a) < a^+ \leq b < f(b)$ ולכן $f(a) < f(b)$ - מש"ל.