קורס תורת הקבוצות - אביב תש"ס

18 ביוני 2000

פתרון תרגיל 10

1. לפי משפט השוואת העצמות, מתקיים או $|A| \le |\mathbb{N}|$ או $|\mathbb{N}| \le |A|$. המקרה השני שקול למה שצריך להוכיח. אחרת, A שוות-עצמה לתת-קבוצה של $\mathbb{N}$. זו לא תת-קבוצה סופית, ולכן היא בת-מנייה. לפיכך A בת-מנייה ובפרט מכילה סדרה.

2. נסמן: $\mathcal{F} = \{B \subseteq \mathcal{P}(A) \,|\, x \neq y \in B \Rightarrow x \cap y = \emptyset \wedge x \in B \Rightarrow |x| = |\mathbb{N}|\}$ (קבוצת כל המשפחות הזרות של תת-קבוצות בנות-מנייה של A). איחוד שרשרת של אברי $\mathcal{F}$ הוא בוודאי משפחה של תת-קבוצות בנות מנייה של A. זו משפחה זרה כי לכל שני איברים בה יש משפחה בשרשרת שמכילה את שניהם, וזו כבר תהיה משפחה זרה. $\mathcal{F}$ לא ריקה (היא מכילה את המשפחה הריקה) ולכן (הלמה של צורן) קיים בה איבר מקסימלי, B. B איננה ריקה כי לפי סעיף 1 יש ל-A תת-קבוצה בת-מנייה, כך שהמשפחה הריקה אינה מקסימלית. נסמן $A' = A \setminus \cup B$. אם A' אינסופית, אז לפי סעיף א' יש $x \subseteq A' \subseteq A$ בת-מנייה. x תהיה זרה לאברי B בבירור, ואז $B \cup \{x\}$ תהיה משפחה זרה של תת-קבוצות בנות מנייה של A, בסתירה למקסימליות B. לכן A' סופית. מפני ש-B לא ריקה, יש $x \in B$, ואז $x' = x \cup A'$ בת-מנייה, ועדיין זרה ליתר אברי B. לכן אם נחליף ב-B את x ב-x' נקבל משפחה זרה של תת-קבוצות בנות מנייה של A, B', שברור שהיא תקיים $\cup B' = A$, כנדרש.

3. נסמן ב-B את המשפחה הזרה שקיבלנו מסעיף 2. ראשית, נשים לב ש-$|B \times \mathbb{N}| = |A|$: לכל $x \in B$ נבחר (ע"י אקסיומת הבחירה) התאמה חח"ע ועל $f_x : \mathbb{N} \to x$ (יש כזו כי x בת-מנייה), ואז נגדיר $\mathcal{F} : B \times \mathbb{N} \to A$ ע"י $\mathcal{F}(x, n) = f_x(n)$, שקל לבדוק שהיא חח"ע ועל. שנית, ניעזר בזהויות של חישוב עצמות כדי לקבל את התוצאה המבוקשת:

$$|A \times \mathbb{N}| = |(B \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}| = |B \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = |B \times \mathbb{N}| = |A|$$

כאשר השתמשנו בכך ש-$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

נשים לב שממשפט קנטור-שרדר-ברנשטיין נובע עתה כי לכל A אינסופית, $|A| = |A \times \{0, 1\}|$. תהיינה עתה A, B שתי קבוצות כך שאחת מהן לפחות אינסופית. בה"כ $|A| \ge |B|$ ואז A אינסופית, ולכן $|A| \le |A \cup B| \le |A \times \{0, 1\}| = |A|$ ולכן $|A \cup B| = |A|$, כלומר שאם (לפחות) אחת מ-A, B אינסופית אז $|A \cup B| = max\{|A|, |B|\}$.

4. נוכיח את הטענה "באינדוקציה על A" בעזרת הלמה של צורן. נגדיר:

$$\mathcal{F} = \{f \in^B B \times B \,|\, B \subseteq A \wedge |B| \ge |\mathbb{N}| \wedge f \, injective\}$$

כלומר קבוצת כל הפונקציות החלקיות מ-A ל-$A \times A$ כך שהן חח"ע, ותמונתן מקיימת: $Range(f) = Dom(f) \times Dom(f)$. נראה ש-$f$ עומדת בתנאי הלמה של צורן: היא לא ריקה, כי לפי 1 יש ל-A תת-קבוצה בת-מנייה B. B מקיימת $|B \times B| = |B|$ ובפרט לכן יש $f \in \mathcal{F}$ שתחומה B. היא גם סגורה באיחודים של שרשרות: ראינו שאיחוד שרשרת של פונקציות חלקיות חח"ע היא פונקציה חלקית חח"ע, ותמונתה איחוד התמונות. מפני שלשרשרת של פונקציות חלקיות, תחומיהן מהווים שרשרת של תת-קבוצות של A, ומפני שלשרשרת C כזו $(\cup C) \times (\cup C) = \cup_{B \in C}(B \times B)$, איחוד השרשרת אכן איבר של $\mathcal{F}$. לפיכך יש בה איבר מקסימלי שנסמן f, ונסמן גם $B = Dom(f)$. מהגדרת f נובע כי $|Dom(f) \times Dom(f)| = |Dom(f)|$, ולכן $|B \times B| = |B|$. בפרט, אם $|B| = |A|$ אז סיימנו.

אולם לא ייתכן ש-$|A| > |B|$! במקרה זה נסמן $A' = A \setminus B$ ואז $|A| = |B \cup A'| = max\{|B|, |A'|\}$ כאשר השוויון השני מוצדק כי B אינסופית. $|A| > |B|$ ולכן חייב להיות $|A'| = max\{|B|, |A'|\}$, כלומר $|A| = |A'|$. ל-A יש תת-קבוצה B. לפיכך ל-A' יש תת-קבוצה B' שוות-עצמה ל-B. B' זרה ל-B כי A' זרה ל-B. נשים

לב כי מכך ש-$|B| = |B \times B|$ נובע: $|B| = |B' \times B'| = |B' \times B| = |B \times B'|$ ומכך שאלה קבוצות אינסופיות נובע ש-$|B'| = |B \times B' \cup B' \times B \cup B' \times B'|$. נניח ש-$g$ פונקצייה חח"ע ועל שתחומה B' ותמונה האיחוד המשולש. אז ברור ש-$f \cup g$ פונקצייה חח"ע ועל מ-$B \cup B'$ ל-$(B \cup B') \times (B \cup B')$, שמרחיבה את f. זו סתירה למקסימליות f ב-$\mathcal{F}$.