קורס תורת הקבוצות – אביב תש"ס

תרגיל 7

בתרגיל זה נדון בהשלכות מסויימות של אי-קיום אקסיומת הבחירה.

בהעדר אקסיומת הבחירה יכולות להתקיים קבוצות אינסופיות שאין להן תת-קבוצות בנות מניה. לקבוצה A שאין לה תת-קבוצה בת מניה נקרא **סופית דדקינד**. במילים אחרות, A היא סופית דדקינד אם $\aleph_0 \not\leq |A|$. כמובן שכל קבוצה סופית היא סופית דדקינד, ובהעדר אקסיומת הבחירה יכולות להתקיים קבוצות אינסופיות שהן סופיות דדקינד.
מושג זה נקרא כך משום ש- C. S. Pierce בשנת 1885 ו-Richard Dedekind בשנת 1888 הגדירו ש-A היא קבוצה סופית אם היא אינה שוות עוצמה לאף תת-קבוצה ממש שלה, ולאור שאלה 3 הגדרה זאת שקולה לכך שאין ל-A תת-קבוצה בת מניה.

1. תהיינה A, B קבוצות סופיות דדקינד. הוכיחו כי גם $A \cup B$ היא סופית דדקינד.
2. תהי A קבוצה כך שהיא וכל איבריה סופיים דדקינד. הראו כי גם $\bigcup A$ סופיתת דדקינד.
3. תהי A קבוצה סופית דדקינד. הראו כי אין ל-A תת-קבוצה ממש B כך ש- $|A| = |B|$.
4. תהי A קבוצה אינסופית שהיא סופית דדקינד. תהי V_n קבוצת כל הסדרות באורך n ללא חזרות של איברים מ-A.
לכל אחת משתי הקבוצות B הבאות ענו על השאלה הבאה. האם B היא סופית? בת-מניה? אינסופית וסופית דדקינד? בעלת עוצמה גדולה מ-$\aleph_0$?
א. $B = V_n$.
ב. $B = \bigcup_{n \in N} V_n$.