קורס תורת הקבוצות – אביב תש"ס

תרגיל 5

1. לקבוצות X ו-Y נגדיר את X^Y כקבוצת כל הפונקציות מ-Y ל-X.
א. תהיינה B, C קבוצות זרות. א. מצאו פונקציה חח"ע ועל בין $A^{B\cup C}$ לבין $A^B \times A^C$. הסיקו ש- $\left|A^{B\cup C}\right| = \left|A^B\right| \cdot \left|A^C\right|$.
ב. מצאו פונקציה חח"ע ועל בין $A^C \times A^C$ לבין $(A\times B)^C$.
ג. מצאו פונקציה חח"ע ועל בין $A^{(B^C)}$ לבין $A^{B\times C}$.

2. הוכיחו כי $\left|N^N\right| = \left|A^N\right|$, היכן ש-$N$ היא קבוצת המספרים הטבעיים ו-A היא הקבוצה $\{0,1\}$.
רמז: ברור כי $\left|A^N\right| \leq \left|N^N\right|$. השתמשו בשאלה הראשונה על מנת להוכיח כי $\left|N^N\right| \leq \left|P(N)^N\right| = \left|A^{N\times N}\right| = \left|A^N\right|$, והסיקו את המסקנה באמצעות משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין.

3. (שאלת רשות). יהי A ריבוע (סגור) במישור, ו-B עיגול. הוכיחו שקיימות שתי חלוקות $A = A_1 \cup A_2$ ו- $B = B_1 \cup B_2$, כאשר A_1 דומה ל-B_1 ו-A_2 דומה ל-B_2. דימיון בין שתי קבוצות במישור משמעו שניתן לעבור מאחת לשניה באמצעות א': ניפוח (או כיווץ), ב': סיבוב, ו-ג':הזזה.