קורס תורת הקבוצות - אביב תש"ס

8 במאי 2000

תרגיל 4

1. חשבון עוצמות:
   (א) הראו שהאיחוד של שתי קבוצות בנות-מנייה הוא בן-מנייה.
   (ב) הראו שאם $|A'| = |A|$ וגם $|B'| = |B|$ אז $|A' \times B'| = |A \times B|$.
   (ג) תהא A קבוצה (אינסופית), ותהא $A \supseteq \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרה אינסופית של איברים שונים זה מזה. תהא B סופית או בת-מנייה, זרה ל-A. הוכח ש- $|A \cup B| = |A|$ (רמז: הזיזו את הסדרה, והשתמשו בסעיף (א) במקרה הבן-מנייה).
   (ד) הסיקו שלקבוצות $[0,1]$ ו-$(0,1)$ אותה העוצמה.

2. הישר והמישור:
   (א) הראו שעצמת $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ היא עצמת הרצף (עצמת $\mathbb{R}$).
   (ב) הראו של-$\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ ול-$(0,1)$ אותה העצמה.
   (ג) נסמן ב-I את קבוצת הפיתוחים העשרוניים של מספרים בקטע $[0,1)$, כלומר כל הסדרות האינסופיות של ספרות עשרוניות: $I = \{0, 1, \ldots, 9\}^{\mathbb{N}}$. ידוע שלכל מספר בקטע $[0,1)$ יש פיתוח עשרוני יחיד שאינו מסתיים בסדרה אינסופית של ספרות '9', ולמספרים רציונליים מסויימים יש פיתוח נוסף, שאינו מסתיים בסדרה אינסופית כזו (לעומת כל האירציונליים). ידוע גם שכל איבר של I מתקבל כך, פרט לסדרה שהיא 9 זהותית. הוכיחו: ל-I ול-$[0,1)$ אותה העצמה. (רמז: 1.(ג)).
   (ד) הראו של-I ול-I^2 אותה העצמה (רמז: התבוננו במקומות הזוגיים והאיזוגיים בסדרה).
   (ה) הוכיחו את המשפט: ל-$\mathbb{R}$ ול-$\mathbb{R}^2$ אותה העצמה.