קורס תורת הקבוצות - אביב תש"ס

28 במאי 2000

תרגיל 11

1. תהא $(A,<_A)$ קבוצה סדורה, ותהא $B \subseteq A$. הצמצום של הסדר של A ל-B הוא: $(B,<_B)$ כך ש-$<_B = <_A \cap (B\times B)$ (כלומר, מה שהסדר של A אומר על השוואת איברי ב-B). לדוגמא: הסדר הרגיל על הטבעיים הוא גם הסדר המושרה על הטבעיים מן הסדר הרגיל על הרציונליים.

   (א) הוכיחו כי $<_B$ הוא יחס סדר מלא על B.

   (ב) הוכיחו כי אם $<_A$ סדר טוב, אז גם $<_B$ סדר טוב.

חשבון סודרים

תהינה $(A,<_A)$, $(B,<_B)$ קבוצות סדורות זרות ($A\cap B=\emptyset$).

נגדיר את השרשור של A ל-B כזוג $(A,<_A)+(B,<_B)=(A\cup B,<_{A\cup B})$, כך ש:

$$<_{A\cup B} = <_A \cup <_B \cup A\times B$$

(כלומר כל איבר של A קטן מכל איבר של B, ובתוך כל קבוצה ניקח את הסדר המקורי).

נגדיר את הסדר המילוני על המכפלה, כזוג $(A,<_A)\cdot(B,<_B)=(A\times B,<_{A\times B})$ כך ש:

$$(a,b) <_{A\times B} (a',b') \Leftrightarrow (a <_A a') \vee (a=a' \wedge b <_B b')$$

(כלומר, כמו במילון, אם האות הראשונה באה קודם אז המילה באה קודם, ומילים בעלות אותה אות ראשונה מסודרות לפי האות השנייה).

2. בדומה לשאלה הקודמת:

   (א) הוכיחו כי $<_{A\cup B}$ הוא סדר מלא על $A\cup B$.

   (ב) הוכיחו כי אם $<_A,<_B$ סדרים טובים אז גם $<_{A\cup B}$ סדר טוב.

   (ג) הוכיחו כי הסדר המילוני הוא אכן סדר מלא על $A\times B$.

   (ד) הוכיחו כי אם $<_A,<_B$ סדרים טובים אז גם הסדר המילוני הוא סדר טוב.

3. שימו לב שהגדרת השרשור והסדר המילוני אינה סימטרית ב-A,B (הכפל והחיבור אינם קומוטטיביים).

   (א) מצאו דוגמא לסדרים טובים $(A,<_A)$, $(B,<_B)$ כך שהשרשור של A ל-B אינו איזומורפי לשרשור של B ל-A.

   (ב) מצאו דוגמא לסדרים טובים $(A,<_A)$, $(B,<_B)$ כך שהסדר המילוני על $A\times B$ אינו איזומורפי לסדר המילוני על $B\times A$.

4.

   (א) הוכיחו שאם $(A,<_A)$ סדורה היטב אזי לכל איבר (פרט לאיבר המקסימלי, אם יש כזה) יש עוקב יחיד, כלומר לכל $x\in A$ קיים $y\in A$ יחיד כך ש-$x<_A y$ ואין $z\in A$ כך ש-$x<_A z<_A y$.

   (ב) תהא $A\subseteq \mathbb{R}$, כך שהסדר המושרה מהסדר הטבעי של הממשיים על A הוא סדר טוב. הוכיחו כי A בת-מנייה או סופית. רמז: השתמשו בא' על-מנת למצוא פונקציה חח"ע מ-A לרציונליים.