קורס תורת הקבוצות – אביב תש"ס

פרק ח': סודרים כעוצמות (גרסה 2, 10.8.2000)

152. **הגדרה**. בשם **סודר מונה** נקרא לסודר שאינו שווה עוצמה לאף סודר קטן ממנו.

153. **משפט**. כל סודר α שווה עוצמה לסודר מונה β יחיד, $\beta \le \alpha$.

הוכחה. יהי β הסודר המזערי שהוא שווה עוצמה ל-α. קיים סודר β כזה והוא קטן או שווה ל-α כי α שווה עוצמה לעצמו. β הוא סודר מונה, כי אילו הוא היה שווה עוצמה ל- $\gamma < \beta$ אז גם γ היה שווה עוצמה ל-α, בניגוד למזעריות β.

154. **משפט**. א. כל סודר סופי הוא סודר מונה.

ב. ω הוא סודר מונה.

ג. כל סודר מונה אינסופי הוא סודר גבולי.

הוכחה. א. אם n סודר סופי ו-$\beta < n$ אז $\beta \subsetneq n$. n הוא קבוצה סופית, ולפי 32א' הוא אינו שווה עוצמה לקבוצה חלקית ממש שלו ולכן אינו שווה עוצמה ל-β.

ב. לפי 38 ω היא קבוצה אינסופית בעוד שכל סודר קטן מ-ω הוא סודר סופי ועל כן הוא קבוצה סופית, שלפי 30ב' אינה שוות עוצמה ל-ω.

ג. יהי α סודר עוקב אינסופי ונראה כי α אינו מונה. קיים $\alpha = s(\beta)$ וגם β אינסופי, ולכן $\beta \ge \omega$. לכן, כפי שהוכחנו, $\omega \cup \{\beta\} \sim \omega$, ולכן $\alpha = s(\beta) = \beta \cup \{\beta\} = \omega \cup (\beta \setminus \omega) \cup \{\beta\}$ שווה עוצמה ל- $\beta = \omega \cup \{\beta \setminus \omega\}$, הקטן מ-$\alpha$.

155. **מושג העוצמה**. אם אנו מניחים את אקסיומת הבחירה אז, לפי משפט הסדר הטוב, כל קבוצה A ניתנת לסידור היטב. מכיוון שקיימת העתקת דימיון בין קבוצה סדורה לבין טיפוס הסדר שלה לכן A שוות עוצמה לטיפוס הסדר שלה, ולכן גם לסודר המונה היחיד שטיפוס הסדר שווה עוצמה לו. לכן איננו זקוקים יותר לאקסיומות העוצמה אלא אנו יכולים להגדיר את העוצמה $|x|$ של קבוצה x כמונה הסודר היחיד שהוא שווה עוצמה ל-x, ועבור הגדרה זאת האקסיומות (1) ו-(2) של 61 ו-62 הן משפטים.

בהעדר אקסיומת הבחירה לא נוותר על אקסיומות העוצמה אלא נרחיב את (2) בכך שנאמר שאם x קבוצה הניתנת לסידור טוב (וזה שקול לכך ש-x היא שוות עוצמה לסודר כלשהו) אז $|x|$ הוא הסודר המונה שהוא שווה עוצמה ל-x.

156. **משפט**. אם α, β סודרים מונים אז $\beta < \alpha$ כסודרים אסם $\beta < \alpha$ כמונים, כלומר אסם $\beta \preceq \alpha$ ו- $\beta \not\approx \alpha$.

הוכחה. אם $\beta \preceq \alpha$ אז לא יתכן $\alpha < \beta$ כי אז גם $\alpha \preceq \beta$ ולכן $\alpha \approx \beta$, וזה לא יתכן, כי α סודר מונה.

157. **משפט**. לכל קבוצה A הסודר המזערי α המקיים $A \not\preceq \alpha$, וקיים כזה לפי 144, הוא סודר מונה. לכן לכל סודר β קיים סודר מונה α הגדול ממנו.

הוכחה. יהי $\gamma < \alpha$, אז לפי מזעריות α קיים $A \preceq \gamma$. אילו היה $\gamma \approx \alpha$ היה גם $A \preceq \alpha$, בניגוד לבחירת A.

158. **משפט**. לכל קבוצה A של סודרים מונים החסם העליון $\bigcup A$ שלה הוא סודר מונה.

הוכחה. נסמן $\alpha = \bigcup A$. אם $\alpha \in A$ אז $\bigcup A = \alpha$ הוא כנדרש. אם $\alpha \notin A$, יהי $\beta < \alpha$ כלשהו ואז מכיוון ש-$\alpha = \bigcup A$ קיים $\beta \in \gamma \in A$ כך ש- $\beta \in \gamma$. אילו היה $\beta \approx \alpha$ אז היה $\gamma \preceq \alpha$ ומכיוון ש- $\gamma \subseteq \alpha$ אז, לפי משפט קנטור ברנשטיין היה $\gamma \approx \alpha$ ומכיוון ש- $\alpha \approx \beta$ היה $\gamma \approx \beta < \gamma$, בניגוד להנחה ש-$\gamma$ הוא סודר מונה, בהיותו איבר של A.

159. **הגדרה**. נגדיר פונקציה $\aleph$ על הסודרים ברקורסיה כדלקמן: $\aleph_0 = \omega$, לכל סודר α $\aleph_{\alpha+1}$ הוא הסודר המונה העוקב ל- $\aleph_\alpha$ (קיים כזה לפי 156), ולכל סודר גבולי β $\aleph_\beta = \bigcup\{\aleph_\alpha \mid \alpha < \beta\}$ (זהו סודר מונה לפי 158).

המינוח הנוכחי שלנו הוא עקבי עם השימוש שלנו ב-$\aleph_0$ כעוצמה של הקבוצות בנות המנייה, כי כאן הגדרנו את $\aleph_0$ כ-ω ו-ω הוא הסודר המונה שהוא שווה עוצמה לכל קבוצה בת מניה.

160. **משפט**. א. תהי $F:\mathrm{On}\to\mathrm{On}$ פונקציה כך שלכל סודר α $F(\alpha+1)>F(\alpha)$ ולכל סודר גבולי β $F(\beta)\geq F(\alpha)$ לכל $\alpha<\beta$ אז F פונקציה עולה.
ב. תהי $F:\mathrm{On}\to\mathrm{On}$ פונקציה עולה אז לכל סודר α קיים $F(\alpha)\geq\alpha$.

הוכחה. א. נוכיח באינדוקציה על γ כי אם $\alpha<\gamma$ אז $F(\alpha)<F(\gamma)$. אם γ עוקב יהי $\gamma=\beta+1$. מכיוון ש- $\alpha<\gamma$ קיים $\alpha\leq\beta$ ולכן, לפי הנחת האינדוקציה, $F(\alpha)\leq F(\beta)<F(\gamma)$. אם γ גבולי אז גם $\alpha+1<\gamma$, ולכן לפי הנחתנו על F, $F(\alpha)<F(\alpha+1)\leq F(\gamma)$.
ב. באינדוקציה על α. ל- $\alpha=0$ ברור כי $F(0)\geq 0$. ל- $\alpha=\beta+1$ קיים, לפי הנחת האינדוקציה, $F(\alpha)>F(\beta)\geq\beta$, ומכיוון ש- α הוא הסודר העוקב ל-β לכן $F(\alpha)\geq\alpha$. ל-α גבולי קיים, לפי הנחת האינדוקציה, $F(\alpha)>F(\beta)\geq\beta$ לכל $\beta<\alpha$. כך $F(\alpha)\supseteq\alpha$ ולכן $F(\alpha)\geq\alpha$.

161. **מסקנה**. א. $\aleph$ היא פונקציה עולה.
ב. לכל סודר α, $\aleph_\alpha\geq\alpha$.

162. **משפט**. טווח $\aleph$ הוא מחלקת כל הסודרים המונים האינסופיים.

הוכחה. יהי γ סודר מונה אינסופי. לפי 161ב' $\aleph_\gamma\geq\gamma$, לכן קיים סודר β מזערי כך ש- $\aleph_\beta\geq\gamma$. אם $\beta=0$ פירושו של דבר הוא כי $\gamma\leq\aleph_0=\omega$, ומכיוון ש-$\gamma$ אינסופי $\omega=\gamma$ וכך $\gamma=\aleph_0\in\mathrm{Range}(\alpha)$. אם $\beta=\alpha+1$ אז לפי הגדרת β קיים $\aleph_\alpha<\gamma$ ולפי הגדרת $\aleph_{\alpha+1}$ זהו הסודר מונה המזערי הגדול מ-$\aleph_\alpha$ ולכן $\aleph_b=\aleph_{\alpha+1}\leq\gamma$. מכיון שלפי בחירת β $\gamma\leq\aleph_\beta$ לכן $\gamma=\aleph_\beta\in\mathrm{Range}(\alpha)$. אם β גבולי אז לפי בחירת β קיים לכל $\alpha<\beta$ $\aleph_\alpha<\gamma$, ולכן $\aleph_\beta=\bigcup\{\aleph_\alpha\mid\alpha<\beta\}\leq\gamma$. לכן $\gamma=\aleph_b\in\mathrm{Range}(\aleph)$.

163. **משפט**. לכל α $\aleph_\alpha+\aleph_\alpha=\aleph_a$, ובמילים אחרות, $\aleph_\alpha\cdot 2=\aleph_\alpha$.

הוכחה. באינדוקציה על α. נסדר את הקבוצה $\aleph_\alpha\times 2$ בסדר מילוני שמאלי. קל לראות כי זהו סדר טוב, ולכן קיימת העתקת דימיון F של קבוצה זאת על סודר γ. יהי $\delta<\gamma$, אז $\delta=F(\beta,i)$ היכן ש- $\beta<\aleph_\alpha$ ו- $i<2$. תהי W קבוצת הזוגות הקודמים לזוג $\langle\beta,i\rangle$ בסדר המילוני. היות ו-F היא שומרת סדר והיא על γ לכן $F\upharpoonright W$ היא העתקה חח"ע של W על δ. נראה כי $|W|<\aleph_\alpha$. ברור כי $W\subseteq(\beta+1)\times 2$. אם β סופי אז גם W סופית וקיים $|W|<\omega\leq\aleph_\alpha$. אם β אינסופי אז מכיון ש- $\beta<\aleph_\alpha$ $\aleph_\lambda=|\beta|$ עבור $\lambda<\alpha$, ולכן גם $\aleph_\lambda=|\beta|=|\beta+1|$ (למשל, לפי 156), ומכיון ש- $W\subseteq(\beta+1)\times 2$ לכן $|W|\leq|\beta+1|\cdot 2=\aleph_\lambda\cdot 2$. לפי הנחת האינדוקציה $\aleph_\lambda\cdot 2=\aleph_\lambda$, לכן $|W|\leq\aleph_\lambda$. כך, בכל מקרה, $|W|<\omega$ או $|W|\leq\aleph_\lambda$ עבור $\lambda<\alpha$, ומכיון ש- $W\approx\delta$ לכן $\delta<\aleph_\alpha$. כך הוכחנו $\mathrm{Range}\,F=\gamma\leq\aleph_\alpha$, לכן $\aleph_\alpha\cdot 2\leq\aleph_\alpha$, ומכאן $\aleph_\alpha\cdot 2=\aleph_\alpha$.

164. **מסקנה**. לכל α,β $\aleph_\alpha+\aleph_\beta=\aleph_{\max(\alpha,\beta)}$.

165. **למה**. תהי $\langle A,<\rangle$ קבוצה סדורה היטב. יהי $<^*$ היחס על $A\times A$ המוגדר ע"י:
$\langle x,y\rangle<^*\langle z,u\rangle$ אם $\max(x,y)<\max(z,u)$ (היכן ש- $\max(a,b)$ הוא הגדול מבין a ו-b, בסדר $<$) או אם $\max(x,y)=\max(z,u)$ ו- $\langle x,y\rangle$ קודם ל- $\langle z,u\rangle$ בסדר המילוני השמאלי, כלומר אם $x<y$ או אם $x=y$ ו- $z<u$.
אז $<^*$ הוא סדר טוב על $A\times A$.

166. **משפט**. לכל α $\aleph_\alpha\cdot\aleph_\alpha=\aleph_\alpha$.

הוכחה. באינדוקציה על α. נסדר את $\aleph_\alpha\times\aleph_\alpha$ בסדר $<^*$ של 165, ותהי F העתקת הדימיון של קבוצה זאת על סודר γ. יהי $\delta<\gamma$ ואז $\delta=F(\beta,\eta)$ היכן ש- $\beta,\eta<\aleph_a$. יהי $\zeta=\max(\beta,\eta)+1$, ותהי W קבוצת איברי $\aleph_\alpha\times\aleph_\alpha$ הקודמים ל- $\langle\beta,\eta\rangle$ בסדר $<^*$, ואז $W\subseteq\zeta\times\zeta$. אם ζ סופי אז גם W סופית. אם ζ אינסופי אז מכיון ש- $\zeta=\beta+1$ או $\zeta=\eta+1$ קיים $\zeta<\aleph_\alpha$ ולכן $\aleph_\lambda=|\zeta|$ עבור $\lambda<\alpha$ כלשהו, ואז $|W|\leq|\zeta|\cdot|\zeta|=\aleph_\lambda\cdot\aleph_\lambda$. לפי הנחת האינדוקציה $\aleph_\lambda\cdot\aleph_\lambda=\aleph_\lambda$ ולכן $|W|\leq\aleph_\lambda<\aleph_\alpha$. כך, בכל מקרה,

$|W| < \aleph_\alpha$ ולכן $|\delta| < \aleph_\alpha$ ולכן $\delta < \aleph_\alpha$. לכן $\operatorname{Range} F = \gamma \le \aleph_\alpha$, ולכן $\aleph_\alpha \le \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha$, ומזה נובעת טענת המשפט.

167. **מסקנה**. לכל α, β $\quad \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_{\max(\alpha,\beta)}$.