קורס תורת הקבוצות – אביב תש"ס

פרק ז': משפטים שקולים לאקסיומת הבחירה (גרסה 1, 6.6.2000)

145. **משפט הסדר הטוב** (אה"ב). על כל קבוצה A קיים יחס $<$ המסדר אותה היטב.
הוכחה. תהי C פונקצית בחירה על $P(A)$. לפי 144 קיים סודר δ כך ש- $\delta \not\preceq A$. יהי t עצם כלשהו שאינו איבר של A. נגדיר עתה ברקורסיה פונקציה $F : \gamma \to A \cup \{t\}$ כדלקמן.

$$F(\beta) = \begin{cases} C(A \setminus \{F(\alpha) \mid \alpha < \beta\}) & \text{אם } A \setminus \{F(\alpha) \mid \alpha < \beta\} \neq \emptyset \\ t & \text{אם } A \setminus \{F(\alpha) \mid \alpha < \beta\} = \emptyset \end{cases}$$

נראה כי כל עוד $F(\beta) \neq t$ F היא חח"ע, כלומר אם $\beta < \gamma$ ו- $F(\gamma) \neq t$ אז $F(\beta) \neq F(\gamma)$. אם $F(\gamma) \neq t$ אז, לפי הגדרת F, $A \setminus \{F(\alpha) \mid \alpha < \gamma\} \neq \emptyset$ ו- $F(\gamma) = C(A \setminus \{F(\alpha) \mid \alpha < \gamma\})$ ולכן, מכיוון ש-C פונקצית בחירה, $F(\gamma) \in A \setminus \{F(\alpha) \mid \alpha < \gamma\}$, כלומר $F(\gamma) \neq F(\alpha)$ לכל $\alpha < \gamma$, ובמיוחד $F(\beta) \neq F(\gamma)$.
אם $t \notin \mathrm{Range}(F)$ אז F היא העתקה חח"ע של δ לתוך A בניגוד לבחירת δ. לכן $t \in \mathrm{Range}(F)$, ויהי γ הסודר המזערי כך ש- $F(\gamma) = t$. לאור מזעריות γ קיים לכל $\alpha < \gamma$ $F(\alpha) \in A$ ולכן $\{F(\alpha) \mid \alpha < \gamma\} \subseteq A$. מצד שני, מכיוון ש- $F(\gamma) = t$ קיים, לפי הגדרת F, $A \setminus \{F(\alpha) \mid \alpha < \gamma\} = \emptyset$ ולכן $A = \{F(\alpha) \mid \alpha < \gamma\}$. כך ראינו כי $G = F \restriction \gamma$ היא העתקה חח"ע של γ על A. לפי 137ג' G משרה יחס $<$ על A כך ש-G היא איזומורפיזם של $\langle \gamma, < \rangle$ על $\langle A, < \rangle$. לפי 137ב', מכיוון שהיחס $<$ מסדר את γ היטב גם היחס $<$ מסדר את A היטב.

146. **הלמה של צורן** (אה"ב). תהי $\langle A, < \rangle$ קבוצה סדורה חלקית בעלת התכונה שלכל קבוצה $B \subseteq A$ שהיא מסודרת לגמרי ע"י היחס $<$ של A יש חסם מלעיל ב-A. אז יש ב-A איבר מקסימלי ביחס ל-$<$.
הוכחה. תהי C פונקצית בחירה על $P(A)$. לפי 144 קיים סודר δ כך ש- $\delta \not\preceq A$. יהי t עצם כלשהו שאינו איבר של A. תהי $H : P(A) \to P(A)$ הפונקציה כך של- $B \subseteq A$ $H(B)$ היא קבוצת החסמים מלעיל ממש של B, כלומר קבוצת ה-y-ים ב-A המקיימים $x < y$ לכל $x \in B$. נגדיר עתה ברקורסיה פונקציה $F : \gamma \to A \cup \{t\}$ כדלקמן.

$$F(\beta) = \begin{cases} C(G(\{F(\alpha) \mid \alpha < \beta\})) & \text{אם } \{F(\alpha) \mid \alpha < \beta\}) \subseteq A \text{ ו- } G(\{F(\alpha) \mid \alpha < \beta\}) \neq \emptyset \\ t & \text{אחרת} \end{cases}$$

נראה כי כל עוד $F(\beta) \neq t$ F היא שומרת סדר, כלומר אם $F(\beta) \neq t$ ו- $\gamma < \beta$ אז $F(\gamma) < F(\beta)$.
אם $F(\beta) \neq t$ אז $G(\{F(\alpha) \mid \alpha < \beta\}) \neq \emptyset$ ו- $F(\beta) \in G(\{F(\alpha) \mid \alpha < \beta\})$. לכן, לפי הגדרת G, $F(\beta) > F(\alpha)$ לכל $\alpha < \beta$ ובמיוחד $F(\beta) > F(\gamma)$.
אם $t \notin \mathrm{Range}(F)$ אז F היא העתקה שומרת סדר של δ לתוך A ולכן F היא חח"ע, בניגוד לבחירת δ.
לכן $t \in \mathrm{Range}(F)$, ויהי γ הסודר המזערי כך ש- $F(\gamma) = t$. נתבונן בקבוצה $B = \{F(\alpha) \mid \alpha < \gamma\}$.
לפי בחירת γ קיים לכל $\alpha < \gamma$ $F(\alpha) \neq t$ ולכן $F(\alpha) \in A$. כתוצאה מכך, ומכך ש- $F(\gamma) = t$, קיים, לפי הגדרת F, $G(\{F(\alpha) \mid \alpha < \gamma\}) = \emptyset$ כלומר $G(B) = \emptyset$. יהיו $u, v \in B$ אז קיימים $\alpha, \beta \in \gamma$ כך ש- $F(\alpha) = u$ ו- $F(\beta) = v$. מכיוון ש- $\alpha < \beta$ או $\alpha = \beta$ או $\beta < \alpha$ ו-F שומרת סדר לכן $u = F(\alpha) < F(\beta) = v$ או $u = F(\alpha) = F(\beta) = v$ או $v = F(\beta) < F(\alpha) = u$, ו-$B$ היא סדורה לגמרי. לפי הנחת המשפט יש ל-B חסם מלעיל y. y הוא איבר מקסימלי ב-A כי אילו היה $z \in A$ $z > y$ כי אז, מכיוון ש-y הוא חסם מלעיל של B, היה $z > y \geq x$ לכל $x \in B$ ו-z היה חסם מלעיל ממש של B, בניגוד להנחתנו כי $g(B) = \emptyset$.

147. **משפט השוואת העוצמות** (אה"ב). לכל שתי קבוצות A, B קיים $B \preceq A$ או $A \preceq B$. במונחים של עוצמות זה אומר שלכל שתי עוצמות a, b קיים $a \leq b$ או $b \leq a$.

הוכחה. נסדר, לפי משפט הסדר הטוב 145, את הקבוצות A ו-B בסדר טוב. לפי 143 קיימת העתקה שומרת סדר, ולכן חח"ע, מאחת משתי הקבוצות הללו לתוך חברתה.

148. **משפט**. משפט הסדר הטוב גורר את אקסיומת הבחירה.

הוכחה. תהי נתונה קבוצה A כלשהי של קבוצות ונוכיח שקיימת פונקצית בחירה C על A. לפי משפט הסדר הטוב קיים יחס סדר טוב $<$ על $\bigcup A$. נגדיר פונקציה C שתחומה A ע"י שנקבע כי לכל $X \in A$ שאינה ריקה $C(X)$ הוא האיבר המזערי של $X \subseteq \bigcup A$ לפי היחס $<$, ואם $X = \emptyset$ אז $C(X) = \emptyset$. ברור כי C היא כנדרש.

149. **משפט**. משפט השוואת העוצמות גורר את משפט הסדר הטוב.

הוכחה. תהי A קבוצה כלשהי ונראה כי יש עליה סדר טוב. לפי 144 קיים סודר α כך ש-$A \npreceq \alpha$. לכן לפי משפט השוואת העוצמות קיים $\alpha \preceq A$, כלומר קיימת פונקציה $F : A \to \alpha$ חח"ע. $\text{Range}(F) \subseteq \alpha$ ולכן $\text{Range}(F)$ סדורה היטב ע"י $<$. לפי 137ג' ו-137ב' F^{-1} משרה סדר טוב על A.

150. **משפט**. הלמה של צורן גוררת את משפט השוואת העוצמות.

הוכחה. בהינתן קבוצות A, B, תהי W קבוצת כל הפונקציות החח"ע F כך ש- $\text{Dom}(F) \subseteq A$ ו- $\text{Range}(F) \subseteq B$. W סדורה חלקית ע"י יחס ההקפה $\subseteq$. נראה כי W ממלאת אחר תנאי הלמה של צורן. תהי $V \subseteq W$ סדורה לגמרי ע"י $\subseteq$. לכן כל שתי פונקציות ב-V מתיישבות ולכן $G = \bigcup V$ היא פונקציה. $\text{Dom}(G) = \bigcup_{F \in V} \text{Dom}(F) \subseteq A$ ו- $\text{Range}(G) = \bigcup_{F \in V} \text{Range}(F) \subseteq B$. נראה כי G היא חח"ע. יהיו $x, y \in \text{Dom}(G)$, $x \neq y$, ואז קיימים $H, J \in V$ כך ש- $x \in \text{Dom}(H)$ ו- $y \in \text{Dom}(J)$. מכיוון ש-V סדורה לגמרי ע"י $\subseteq$, אחת הפונקציות H ו-J מקיפה את חברתה, ונניח, ללא הגבלת הכל-ליות, כי $H \subseteq J$. אז קיים גם $x \in \text{Dom}(H) \subseteq \text{Dom}(J)$. מכיוון ש-$J$ חח"ע קיים $J(x) \neq J(y)$ ולכן $G(x) = J(x) \neq J(y) = G(y)$. מכיוון ש-$G$ חח"ע, $\text{Dom}(G) \subseteq A$ ו- $\text{Range}(G) \subseteq B$ לכן גם $G \in W$ והיא כמובן חסם מלעיל ל-V. לפי הלמה של צורן יש ב-W איבר F מקסימלי. אם $\text{Dom}(F) = A$ אז F היא העתקה חח"ע של A לתוך B וקיים $A \preceq B$. אם $\text{Range}(F) = B$ אז F^{-1} היא העתקה חח"ע של B לתוך A וקיים $B \preceq A$. נראה כי אחד משני המקרים הללו חייב להתקיים. המקרה הנותר הוא המקרה בו $\text{Dom}(F) \subsetneq A$ ו- $\text{Range}(F) \subsetneq B$. במקרה זה יהי $x \in A \setminus \text{Dom}(F)$ ו- $y \in B \setminus \text{Range}(F)$, ואז $H = F \cup \{\langle x, y \rangle\}$ היא פונקציה חח"ע, $\text{Dom}(H) = \text{Dom}(F) \cup \{x\} \subseteq A$ ו- $\text{Range}(H) = \text{Range}(F) \cup \{y\} \subseteq B$. לכן גם $H \in W$ ו- $F \subsetneq H$ בניגוד למקסימליות F.

151. לאור משפטים 145 עד 150 אקסיומת הבחירה, משפט הסדר הטוב, הלמה של צורן ומשפט השוואת העוצמות שקולים זה לזה.