קורס תורת הקבוצות – אביב תש"ס

פרק ו': סדר וסודרים (גרסה 2, 5.6.2000)

115. **הגדרה**. תהי A מחלקה ו-$<$ יחס. א. אנו אומרים ש-$<$ **מסדר חלקית** את A אם:
אירפלקסיביות: לכל $x \in A$ $\ x \not< x$.
טרנזיטיביות: לכל $x,y,z \in A$ אם $x<y$ ו-$y<z$ אז $x<z$.
ומכאן נובע: אסימטריה: לכל $x,y \in A$ אם $x<y$ אז $y \not< x$.
ב. אנו אומרים ש-$<$ **מסדר** או **מסדר מלא** את A אם $<$ מסדר חלקית את A וקיים גם:
השוואה: לכל $x,y \in A$ אם $x \neq y$ אז $x<y$ או $y<x$.
ג. אנו אומרים ש-$<$ **מסדר היטב** את A אם $<$ מסדר את A ולכל מחלקה חלקית חלקית ל-A שאינה ריקה יש איבר מינימלי y, כלומר $y \in A$ ולכל $x \in A$ אם $x \neq y$ אז $y<x$.

116. **למה**. אם היחס $<$ מסדר חלקית (מסדר, מסדר היטב) את A ו-$B \subseteq A$ אז $<$ מסדר חלקית (מסדר, מסדר היטב, בהתאמה) גם את B.

117. **הגדרה**. מחלקה A נקראת **טרנזיטיבית** אם כל איבר של איבר של A הוא איבר של A. (זה שקול לכך ש-$\bigcup A \subseteq A$, וגם לכך שלכל $x \in A$ $\ x \subseteq A$).
אין לבלבל בין מושג הטרנזיטיביות של מחלקה, שהוגדר כאן, לבין מושג הטרנזיטיביות של יחס.

118. **למה**. אם כל איברי A הם קבוצות טרנזיטיביות אז:
א. גם אחודם $\bigcup A$ הוא טרנזיטיבי.
ב. אם $A \neq \emptyset$ אז גם חיתוכם $\bigcap A$ הוא טרנזיטיבי.

119. **הגדרה**. קבוצה x נקראת **מספר סודר** או, בקיצור, **סודר** אם:
א. x קבוצה טרנזיטיבית.
ב. x סדורה היטב ע"י יחס ה-$\in$.
האותיות היווניות $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ יסמנו סודרים.

120. **משפט**. א. $\emptyset$ הוא סודר.

121. **משפט**. לכל סודר α קיים $\alpha \notin \alpha$.
הוכחה. לפי הגדרת מושג הסודר $\in$ מסדר את α ובפרט קיימת אירפלקסיביות, כלומר לכל $x \in \alpha$ $\ x \notin x$.
אילו היה $\alpha \in \alpha$ היה כלל זה נכון גם במקרה בו $x = \alpha$ והיה קיים $\alpha \notin \alpha$, בסתירה להנחה ש-$\alpha \in \alpha$.

122. **משפט**. אם α הוא סודר אז גם $\alpha \cup \{\alpha\}$ הוא סודר.
הוכחה. $\alpha \cup \{\alpha\}$ טרנזיטיבית: אם $x \in y \in \alpha \cup \{\alpha\}$ אז או ש-$x \in y \in \alpha$ ואז $x \in \alpha \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$, כי α טרנזיטיבית, או ש-$x \in y \in \{\alpha\}$, ואז $y = \alpha$ ו-$x \in \alpha \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$.
$\alpha \cup \{\alpha\}$ סדורה היטב ע"י $\in$: אירפלקסיביות: יהי $x \in \alpha \cup \{\alpha\}$. אם $x \in \alpha$ אז $x \notin x$ לפי הגדרת מושג הסודר. אם $x = \alpha$ אז $x \notin x$ לפי 121.
טרנזיטיביות: יהיו $x,y,z \in \alpha \cup \{\alpha\}$, $\ x \in y \in z$. אם $z \in \alpha$ אז לאור טרנזיטיביות α גם $y \in \alpha$ וגם $x \in \alpha$, ולאור טרנזיטיביות $\in$ על α $\ x \in z$. אם $z = \alpha$ אז לאור טרנזיטיביות α, קיים $x \in \alpha = z$.
השוואה: יהיו $x,y \in \alpha \cup \{\alpha\}$, $\ x \neq y$. אם אחד מהם, נאמר y, הוא α אז $x \in \alpha = y$. אם שניהם ב-α אז מכיוון ש-α סודר קיים $x \in y$ או $y \in x$.
סדר טוב: תהי $\emptyset \neq A \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$. אם $A \cap \alpha \neq \emptyset$ אז מכיוון ש-$\in$ מסדר היטב את α קיים y מזערי ב-$A \cap \alpha$. נראה כי y מזערי ב-A. יהי $x \in A$. אם $x \in \alpha$ אז, לפי הגדרת y, $\ x = y$ או $y \in x$, ואם $x = \alpha$ אז $y \in \alpha = x$. אם $A \cap \alpha = \emptyset$ אז $A = \{\alpha\}$ ו-α הוא האיבר המזערי של A.

123. **משפט**. כל איבר של סודר הוא סודר.

הוכחה. יהי $z \in \alpha$. נוכיח ש-z טרנזיטיבית. יהיו $x \in y \in z$. מכיוון ש-α טרנזיטיבית ו- $z \in \alpha$ גם $y \in \alpha$ ולכן גם $x \in \alpha$ כעת ש- $x, y, z \in \alpha$ אז, לאור טרנזיטיביות $\in$ על α קיים $x \in z$. כעת נראה כי $\in$ מסדר היטב את z. מכיוון ש-α טרנזיטיבית $z \subseteq \alpha$. $\in$ מסדר היטב את α, ולכן, לפי 116, הוא גם מסדר היטב את z.

124. **משפט**. אם $b \subseteq \alpha$ טרנזיטיבית אז $b = \alpha$ או $b \in \alpha$. לכן אם $\beta \subseteq a$ $\beta = \alpha$ או $\beta \in \alpha$.

הוכחה. אם $b \subsetneq \alpha$ יהי y האיבר המזערי של $\alpha \setminus b$. אז, לאור מזעריות y קיים לכל $x \in y$ $x \in b$, כלומר $y \subseteq b$. נראה עתה כי $b \subseteq y$ ולכן $b = y \in \alpha$. יהי $x \in b$. אם $x \notin y$ אז משום ש- $x, y \in \alpha$ והיחס $\in$ מסדר את α לכן $x = y$ או $y \in x$, ובכל מקרה, מכיוון ש-b טרנזיטיבית ו- $x \in b$, קיים $y \in b$, בסתירה לבחירת y.

125. **משפט**. לכל α, β $\alpha = \beta$ או $\alpha \in \beta$ או $\beta \in \alpha$.

הוכחה. יהי $y = \alpha \cap \beta$. לפי 118ב' y היא קבוצה טרנזיטיבית. לפי 124, $y = \alpha$ או $y \in \alpha$, וכן $y = \beta$ או $y \in \beta$. אם קיים לפחות אחד השיוויונות, אז קיימת תוצאת המשפט. אחרת, קיים $y \in \alpha$ וגם $y \in \beta$ ולכן $y \in \alpha \cap \beta = y$. מצב זה לא יתכן כי אף איבר של α אינו איבר של עצמו.

126. **משפט**. אם A מחלקה לא ריקה של סודרים אז $\bigcap A$ הוא איבר מזערי של A ביחס ל-$\in$.

הוכחה. לפי 118ב' ו-124 $\bigcap A$ הוא סודר שנסמנו ב-α. ברור כי $\alpha \subseteq \beta$ לכל $\beta \in A$, ולפי 124, לכל $\beta \in A$ קיים $\alpha = \beta$ או $\alpha \in \beta$. אם עבור $\beta \in A$ כלשהו $\alpha = \beta$ אז α הוא האיבר המזערי של A. אחרת, קיים לכל $\beta \in A$ $\alpha \in \beta$, ולכן $\alpha \in \bigcap A = \alpha$, בסתירה ל-121.

127. **משפט**. מחלקת כל הסודרים On סדורה היטב ע"י $\in$.

הוכחה. לפי 121, טרנזיטיביות הסודרים, 125 ו-126.

128. **הסדר של הסודרים**. נסמן את הסדר $\in$ בין הסודרים גם ב-$<$, ואז גם $\alpha \leq \beta$ משמעותו ש- $\alpha = \beta$ או $\alpha \in \beta$, כלומר $\beta \in \alpha \cup \{\alpha\}$. בסדר זה $\alpha \cup \{\alpha\}$ הוא העוקב של α, במובן ש-$\alpha \in \alpha \cup \{\alpha\}$ ולא קיים β כך ש- $\alpha < \beta < \alpha \cup \{\alpha\}$. לאור 124 קיים $\beta \leq \alpha$ אםם $\beta \subseteq \alpha$, ו- $\beta < \alpha$ אםם $\beta \subsetneq \alpha$.

129. **מסקנה**. מחלקת כל הסודרים On אינה קבוצה.

הוכחה. אילו היתה On קבוצה אז לפי 123 ו-127 היתה On סודר ולכן היה קיים $\mathrm{On} \in \mathrm{On}$, בניגוד ל-121.

130. **מסקנות**. א. כל קבוצה טרנזיטיבית של סודרים היא סודר.

ב. לכל קבוצת סודרים A $\bigcup A$ היא סודר שהוא החסם העליון של A, כלומר $\bigcup A$ היא הסודר המזערי שהוא גדול או שווה מכל אחד מן הסודרים ב-A.

הוכחה. א. נובע מ-127 ו-116.

ב. לפי 118א', 123 ו-א' $\bigcup A$ הוא סודר. לפי 124 $\bigcup A$ גדול או שווה מכל סודר ב-A. מצד שני, אם $\beta \geq \alpha$ לכל $\alpha \in A$ אז מכיוון ש-β קבוצה טרנזיטיבית קיים $\beta \supseteq \alpha$ לכל $\alpha \in A$ ולכן $\bigcup A \supseteq \beta$, ולפי 124 $\beta \geq \bigcup A$.

131. **הגדרה**. א. הסודר $\alpha \cup \{\alpha\}$ נקרא **הסודר העוקב ל-**α ונסמנו גם ב- $s(\alpha)$.

ב. α נקרא **סודר עוקב** אם $\alpha = s(\beta)$ עבור סודר β כלשהו.

ג. את הסודר $\emptyset$ נסמן גם ב-0.

ד. סודר שאינו 0 ואינו עוקב נקרא **סודר גבולי**.

132. **למה**. א. $\alpha < s(\alpha)$, ואין שום סודר בין α ו-$s(\alpha)$.

ב. סודר α הוא גבולי אםם $\alpha \neq 0$ ולכל $\beta < \alpha$ קיים γ כך ש- $b < \gamma < \alpha$.

133. **הגדרה**. α נקרא **סודר סופי** אם α הוא סודר שהוא 0 או עוקב וכל סודר הקטן ממנו הוא 0 או עוקב. נגדיר את המספרים הטבעיים כסודרים הסופיים. לפי אקסיומת האינסוף מחלקת המספרים הטבעיים N היא קבוצה, ולכן לפי 134א' ו-130א' N היא סודר, שנסמנו גם ב-ω.

134. **למה**. א. אם α סודר סופי אז כל סודר $\beta < \alpha$ גם הוא סופי.
ב. אם α הוא סודר סופי אז גם $s(\alpha)$ הוא סודר סופי.

135. **משפט**. המספרים הטבעיים, כלומר הסודרים הסופיים, ממלאים אחר אקסיומות פיאנו הבאות:
א. $s(n) \neq 0$.
ב. אם $s(m) = s(n)$ אז $m = n$.
ג. אקסיומת האינדוקציה. אם $0 \in A$, ולכל סודר סופי n אם $n \in A$ אז גם $s(n) \in A$ אז A מכילה את כל הסודרים הסופיים.

הוכחה. ג. אם A אינה מכילה את כל הסודרים הסופיים, יהי α הסודר הסופי המזערי שאינו ב-A. $\alpha \neq 0$ כי $0 \in A$. לכן α הוא עוקב של סודר β, שהוא סופי לפי 134א'. לפי מזעריות α קיים $\beta \in A$, ולכן, לפי הנחתנו על A, גם $\alpha = s(\beta) \in A$, בסתירה לבחירת α.

136. **הגדרה**. יהי R יחס על A, כלומר $R \subseteq A \times A$, ו-S יחס על B. פונקציה F מ-A ל-B נקראת **איזומורפיזם** מ- $\langle A, R\rangle$ ל- $\langle B, S\rangle$ אם F העתקה חח"ע של A על B, ולכל $x, y \in A$ קיים xRy, כלומר $\langle x, y\rangle \in R$, אםם $F(x)SF(y)$. אנו אומרים ש- $\langle A, R\rangle$ ו- $\langle B, S\rangle$ **איזומורפיים** אם קיים איזומורפיזם מ-A ל-B. במקרה של קבוצות סדורות אנו קוראים ל-F כזאת **העתקת דימיון** ואנו אומרים ש- $\langle A, R\rangle$ ו- $\langle B, S\rangle$ **דומות**.

137. **למה**. א. יחס האיזומורפיזם, כפי שהוגדר כאן, הוא יחס שקילות, כלומר רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.
ב. אם $\langle A, R\rangle$ ו- $\langle B, S\rangle$ איזומורפיים ו- $\langle A, R\rangle$ היא קבוצה סדורה חלקית (סדורה, סדורה היטב) אז גם $\langle B, S\rangle$ היא קבוצה סדורה חלקית (סדורה, סדורה היטב, בהתאמה).
ג. יהי R יחס על A ותהי F העתקה חח"ע מ-A ל-B. בשם **היחס המושרה** על B ע"י R באמצעות F אנו קוראים ליחס $S = \{\langle F(x), F(y)\rangle \mid xRy\}$ על B. ברור כי F הוא איזומורפיזם מ- $\langle A, R\rangle$ ל- $\langle B, S\rangle$.

138. **הגדרה**. תהיינה $\langle A, R\rangle$ ו- $\langle B, S\rangle$ קבוצות סדורות. העתקה F מ-A ל-B נקראת **שומרת סדר** (בהתייחס ל- $\langle A, R\rangle$ ו- $\langle B, S\rangle$) אם לכל $x, y \in A$ אם xRy אז $F(x)SF(y)$. ברור כי אם F היא שומרת סדר והיא על B אז היא איזומורפיזם מ-A ל-B.

139. **למה**. כל העתקה שומרת סדר מקבוצה סדורה לקבוצה סדורה היא חח"ע.

140. **הגדרה**. תהי $\langle A, <\rangle$ קבוצה סדורה. קבוצה $B \subseteq A$ נקראת **רישא** של A אם לכל $x, y \in A$ אם $x \in B$ ו- $y < x$ אז גם $y \in B$.
שים לב כי גם $\emptyset$ וגם A הן רישאות של A.

141. **משפט**. תהיינה $\langle A, <\rangle$ ו- $\langle B, <\rangle$ קבוצות סדורות היטב ($<$ מסמן כאן שני יחסים שונים, אבל זה לא מפריע). קיימת לכל היותר העתקה שומרת סדר אחת של A על רישא של B. במיוחד, אם $\langle A, <\rangle$ ו- $\langle B, <\rangle$ דומות אז קיימת העתקת דימיון יחידה מ- $\langle A, <\rangle$ ל- $\langle B, <\rangle$.

הוכחה. תהיינה F, G העתקות שומרות סדר מ-A על רישאות של B. נוכיח כי $G(x) = F(x)$ לכל $x \in A$, וזאת באינדוקציה על x. נניח כי $F(x) \neq G(x)$, ונוכל להניח, ללא הגבלת הכלליות, כי $F(x) < G(x)$. מכיוון ש- $\mathrm{Range}(G)$ היא רישא של B ו- $F(x) < G(x) \in \mathrm{Range}(G)$ לכן גם $F(x) \in \mathrm{Range}(G)$, כלומר $F(x) = G(y)$ עבור $y \in A$ כלשהו. אילו היה $x \geq y$ היה $F(x) = G(y) \geq G(x)$, בניגוד להנחתנו, ולכן $x < y$. לכן, לפי הנחת האינדוקציה, $F(y) = G(y)$. מאידך $F(x) = G(y)$ ולכן $F(x) = F(y)$ למרות ש- $x < y$, וכך הגענו לסתירה.

142. **משפט**. לכל קבוצה סדורה היטב $\langle A, <\rangle$ קיים סודר יחיד γ כך ש- $\langle A, <\rangle$ דומה ל- $\langle \gamma, \in\rangle$. סודר זה נקרא **טיפוס הסדר** של $\langle A, <\rangle$.

הוכחה. נגדיר את F על A ברקורסיה ע"י

$$F(x) = \{F(y) \mid y < x\} \qquad (*)$$

. ראשית נוכיח, באינדוקציה על x כי $F(x)$ הוא סודר. לפי הנחת האינדוקציה, לכל $y < x$ $F(y)$ הוא סודר, ולכן אגף ימין של $(*)$ הוא קבוצה של סודרים. נראה שזאת קבוצה טרנזיטיבית ולכן, לפי 130א', אגף ימין של $(*)$ הוא סודר. יהי u איבר של איבר $F(y)$ של אגף ימין של $(*)$. לפי הגדרת $F(y)$ $u = F(z)$ עבור $z < y$ כלשהו. מכיוון ש- $z < y < x$ קיים $z < x$ ולכן $u = F(z)$ היא באגף ימין של $(*)$.
כך ראינו ש- $\text{Range}(F)$ היא קבוצה של סודרים. נראה כי $\text{Range}(F)$ היא טרנזיטיבית ולכן, לפי 130 א', היא סודר γ. יהי u איבר של איבר של $\text{Range}(F)$, כלומר $u \in F(x)$ עבור $x \in A$ כלשהו. אז, לפי הגדרת $F(x)$ $u = F(y)$ עבור $y \in x$ כלשהו, ולכן גם $u \in \text{Range}(F)$.
F היא העתקת דימיון, כי לפי הגדרת F אם $y < x$ אז $F(y) \in F(x)$.
הסודר γ הוא יחיד כי אם קיימת גם העתקת דימיון G מ-A על סודר β, יהי δ הגדול מבין γ ו-β ואז F ו-G הן שתי העתקות שומרות סדר מ-A על רישאות של δ ולכן, לפי 141, $F = G$ והטווחים שלהן γ ו-β הם שווים.

143. **משפט**. לכל שתי קבוצות סדורות היטב, קיימת העתקה שומרת סדר מאחת מהן על רישא של חברתה.
הוכחה. תהיינה $\langle A, <\rangle$ ו- $\langle B, <\rangle$ קבוצות סדורות היטב ויהיו α ו-β טיפוסי הסדר שלהם, ויהיו F העתקת הדימיון מ-A ל-α ו-G מ-B ל-β. נניח, ללא הגבלת הכלליות, כי $\alpha \leq \beta$, ואז FG^{-1} היא העתקה שומרת סדר מ-A ל-B.

144. **משפט Hartogs**. לכל קבוצה A קיים סודר α כך שלא קיים $\alpha \preceq A$.
הוכחה. תהי W קבוצת כל טיפוסי הסדר של הקבוצות החלקיות ל-A כשהן מסודרות בסדרים טובים כלשהם. יהי α העוקב של החסם העליון של W אז α גדול מכל איברי W. נראה עתה כי $\alpha \not\preceq A$. אילו היתה $\alpha \preceq A$ היתה קיימת העתקה F חח"ע של α על קבוצה B חלקית ל-A. לפי 137ג' קיים יחס $<$ על B כך ש-F הוא איזומורפיזם של $\langle \alpha, <\rangle$ על $\langle B, <\rangle$. לפי 137ב' $<$ הוא יחס סדר טוב על B ו-F הוא העתקת דימיון של $\langle \alpha, <\rangle$ על $\langle B, <\rangle$. לכן F^{-1} היא העתקת דימיון של $\langle B, <\rangle$ על $\langle \alpha, <\rangle$, ולכן α הוא טיפוס הסדר של $\langle B, <\rangle$, ו- $\alpha \in W$, בסתירה לכך ש-α גדול מכל איברי W.