קורס תורת הקבוצות – אביב תש"ס

פרק ה': אקסיומת הבחירה (גרסה 1, 21.5.2000)

98. **משפט.** אם A קבוצה איסופית אז לכל $n \in N$ $N_n \preceq A$.
הוכחה. באינדוקציה על n. עבור $n = 0$ הפונקציה הריקה $\emptyset$ היא העתקה חח"ע של $N_0 = \emptyset$ לתוך A. נניח, כהנחת אינדוקציה, שקיימת העתקה חח"ע $f : N_n \to A$. מכיוון ש-A אינסופית f אינה על A ויהי $t \in A \setminus \mathrm{Range}(f)$. אז הפונקציה $f \cup \{\langle n, t\rangle\}$ היא העתקה חח"ע של $N_n \cup \{n\} = N_{n+1}$ לתוך A, ולכן $N_n \preceq A$.

99. **האם לכל קבוצה אינסופית יש תת-קבוצה בת מניה?** ננסה להוכיח זאת ע"י חיקוי הוכחת המשפט הקודם. תהי A קבוצה אינסופית. נגדיר ברקורסיה פונקציה F כדלקמן. מכיוון ש-A אינסופית היא אינה ריקה, ולכן יש בה איבר a, ונגדיר $F(0) = a$. עבור $n > 0$ הקבוצה $B_n = \{F(0), F(1), \ldots, F(n-1)\} \subseteq A$ אינה כל A, כי $F \restriction N_n$ היא העתקה של N_n על B_n, ולכן, כפי שקל לראות, B_n סופית בעוד A אינסופית. לכן נקח ל-$F(n)$ איבר כלשהו של $A \setminus B_n$. קל מאוד לראות כי F זאת היא חח"ע ולכן היא העתקה חח"ע של N על $\mathrm{Range}(F)$, ו- $\mathrm{Range}(F)$ היא תת-קבוצה בת מניה של A.

ההוכחה שהבאנו אינה הוכחה כי מאקסיומות תורת הקבוצות אי אפשר להוכיח קיום פונקציה F כפי ש"הגדרנו". הפונקציות שאפשר להוכיח בתורת הקבוצות את קיומן הן פונקציות המוגדרות בהגדרה תיקנית, ראה 24, כי את הפונקציות הללו אנו יכולים להביע בשפה. בנוסף על פונקציות המוגדרות בהגדרה תיקנית יש לנו גם פונקציות המוגדרות ברקורסיה על המספרים הטבעיים. במקרה זה אין לנו אקסיומה חדשה האומרת שקיימת פונקציה F המקיימת את דרישות הרקורסיה, אלא שאפשר לתרגם הגדרה ברקורסיה להגדרה תיקנית, וכבר ידוע לנו שהגדרה תיקנית קובעת פונקציה. כדי שהפונקציה F ב"הוכחה" שהבאנו תהיה אמנם מוגדרת ברקורסיה דרוש שבהגדרה $F(n)$ ייקבע באופן יחיד. מה שעשינו כאן הוא שאמרנו ש- $F(n)$ הוא איבר כלשהו של $A \setminus B_n$ וזה אינו קובע איבר מסויים כי כל איבר של $A \setminus B_n$ עונה על דרישה זאת, ומכיוון ש-F היא פונקציה ל- $F(n)$ צריך להיות ערך יחיד.

100. בדיון שערכנו עד עתה התערבבה השאלה של הגדרת פונקציה שאינה מצביעה על איברים מסויימים עם השאלה של הגדרה ברקורסיה. כדי לראות את הבעייה באופן ישיר נתבונן בדוגמה הבאה. תהי F סידרה של זוגות נעליים, כלומר לכל n $F(n)$ הוא זוג נעליים. אנו רוצים בפונקציה B שתחומה N הבוחרת נעל מכל זוג נעליים שבטווח F. קל מאוד להגיע לפונקציה כזאת; נגדיר לכל $n \in N$

$$B(n) = \text{הנעל הימנית שבזוג } F(n)$$

זאת היא הגדרה תיקנית כמו ב-24 וכמובן שקיימת פונקציה כזאת. כעת תהי G סידרה אינסופית של זוגות גרביים, ואנו מעוניינים בפונקציה C שתחומה N הבוחרת גרב מכל זוג גרביים שבטווח G. הדרישה שלכל $n \in N$ $C(n) \in G(n)$ היא תנאי שאנו רוצים שהפונקציה C תקיים אבל אינה הגדרה של C, ולא נראית לעין כל הגדרה לפונקציה כזאת.

מה קורה אם במקום סידרה אינסופית של זוגות גרביים יש לנו סידרה בת שלושה זוגות גרביים, כלומר G היא פונקציה שתחומה N_3? במקרה זה אנו יכולים, כפי שנראה, להוכיח קיום פונקציה C כנדרש, גם אם איננו וכולים להצביע על פונקציה מסויימת כזאת. נניח כי $a \in G(0)$, $b \in G(1)$ ו- $c \in G(2)$. תהי C הפונקציה המוגדרת ע"י ההגדרה המפורשת $C(0) = a$, $C(1) = b$ ו- $C(2) = c$. כך הוכחנו שלכל $a \in G(0)$, $b \in G(1)$ ו- $c \in G(2)$ קיימת פונקציה C המקיימת $C(n) \in G(n)$ לכל $n \in N_2$. אולם מכיוון שכל אחת מהקבוצות $G(0)$, $G(1)$ ו- $G(2)$ היא קבוצה בת שתי גרביים היא אינה ריקה וקיימים a, b, c כנ"ל, ולכן קיימת פונקציה C המקיימת $C(n) \in G(n)$ לכל $n \in N_2$. פונקציה C זאת הוגדרה במפורש עם הפרמטרים a, b, c.

האם את מה שעשינו זה עתה לפונקציה G שתחומה N_2 אנו יכולים לעשות לפונקציה G שתחומה N? אם נחקה את ההוכחה ל-N_2 נאמר כך: יהי $a_0 \in G(0)$, $a_1 \in G(1)$, וכן הלאה יהי $a_k \in G(k)$, לכל מספר טבעי k, ואז נגדיר במפורש את C שתחומה N ע"י $C(n) = a_n$, ויתקיים $C(n) \in G(n)$ לכל $n \in N$ כנדרש. במקרה זה נשאלת השאלה למה אנו מתכוונים כאשר אנו כותבים a_k. אם אנו מתכוונים ש-a היא פונקציה על הטבעיים כך שלכל $k \in N$ $a_k \in G(k)$ אז אנו מניחים את מה שאנו רוצים להוכיח, בשינוי שם הפונקציה מ-C ל-a. אם אנו מתכוונים לכך ש- $a_0, a_1, a_2, \ldots$ הם סימנים נפרדים אז כדי לכתוב את ההנחות $a_0 \in G(0)$, $a_1 \in G(1)$, וכן הלאה, עלינו להשתמש בביטוי אינסופי בעוד ששפתנו הנה סופית.
לכן אם אנו רוצים, למשל, לקבל פונקציה C כך שלכל $n \in N$ $C(n)$ תהיה גרב אחת מתוך זוג הגרביים $G(n)$, עלינו להוסיף במפורש אקסיומה האומרת שקיימת פונקציה כזאת.

101. **הגדרה**. לקבוצה A, פונקציה C שתחומה A נקראת **פונקצית בחירה** על A אם לכל $X \in A$ שהיא קבוצה לא ריקה קיים $C(X) \in X$.

102. **אקסיומת הבחירה**. לכל קבוצה A קיימת פונקציה בחירה C שתחומה A.

במשפטים בהם נשתמש באקסיומת הבחירה נכתוב (אה"ב) אחרי המילה "משפט".

103. **משפט**(אה"ב). לכל קבוצה אינסופית A יש תת-קבוצה בת מניה.

הוכחה. תהי C פונקצית בחירה שתחומה $P(A)$. נגדיר ברקורסיה $F : N \to A$ כדלקמן. $F(n) = C(A \setminus \{F(0), F(1), \ldots, F(n-1)\})$. (עבור $n = 0$ זה אומר $F(0) = C(A)$). לכן $F(n)$ הוא איבר של A השונה מ- $F(0), F(1), \ldots, F(n-1)$ והפונקציה F היא חח"ע. $\mathrm{Range}(F)$ היא כמובן בת מניה והיא חלקית ל-A.

104. **מסקנה**(אה"ב). $\aleph_0$ הוא המונה האינסופי המזערי במובן שלכל מונה אינסופי a קיים $\aleph_0 \leq a$.

105. **משפט**(אה"ב). אם $F : A \to B$ על B אז קיימת תת-קבוצה D של A כך ש- $F \restriction D$ היא העתקה חח"ע של D על B, ולכן $|B| \leq |A|$.

הוכחה. תהי C פונקצית בחירה שתחומה $P(A)$. תהי
$D = \{x \in A \mid x = C(\{y \in A \mid F(y) = F(x)\})\}$.
יהיו $x, z \in D$ ונניח $F(z) = F(x)$. מכיוון ש- $x, z \in D$ קיימים השיוויונות
$x = C(\{y \in A \mid F(y) = F(x)\})$ ו- $z = C(\{y \in A \mid F(y) = F(z)\})$. מכיוון ש- $F(z) = F(x)$ לכן אגפי ימין של שני שוויונות אלו שווים, ולכן $z = x$. כך הוכחנו שהגבלת F ל-D היא חח"ע.
כדי להוכיח ש- $F \restriction D$ היא על B נצא מ- $u \in B$ כלשהו. נסמן $x = C(\{y \in A \mid F(y) = u\})$. מכיוון ש-$F$ היא על B לכן $\{y \in A \mid F(y) = u\}$ היא קבוצה לא ריקה החלקית ל-A, ולכן, לפי הגדרת x, x הוא איבר שלה, כלומר $u = F(x)$. מכאן נובע $x = C(\{y \in A \mid F(y) = u\}) = C(\{y \in A \mid F(y) = F(x)\})$, ולפי הגדרת D זה אומר ש- $x \in D$. מכיוון ש- $u = F(x)$ הוכחנו בזה כי $F \restriction D$ היא על B.

106. **משפט**(אה"ב). תהי A קבוצה סופית או בת מניה שכל איבריה קבוצות סופיות או בנות מניה אז $\bigcup A$ היא סופית או בת מניה.

הוכחה. תהי W קבוצת כל הפונקציות מקבוצות N_n או N על איברים של A. לכל $X \in A$ תהי T_X קבוצת כל הפונקציות החח"ע שתחומן N_n או N ושהן על X. X היא קבוצה סופית או בת מניה ולכן ישנן פונקציות כאלו ו-T_X אינה ריקה. לכן $C(T_X) \in T_X$, כלומר $C(T_X)$ היא העתקה חח"ע של קבוצה של מספרים טבעיים על X, ונגדיר $F(X) = C(T_X)$. תהי J העתקה של N_n או N על A. תהי $B = \{\langle k, l\rangle \mid k \in \mathrm{Dom}(J) \wedge l \in \mathrm{Dom}(F(J(k))\}$ ברור כי $B \subseteq N \times N$, ולכן, לפי 39 35א' ו-42ב', $|B| \leq \aleph_0$. נגדיר את הפונקציה H שתחומה B ע"י $H(k, l) = F(J(k))(l)$.
נראה כי $\mathrm{Range}(H) = \bigcup A$. אם $\langle k, l\rangle \in B$ אז $k \in \mathrm{Dom}(J)$, $J(k) \in A$, $F(J(k))$ היא העתקה של קבוצת מספרים טבעיים על $J(k)$ ולכן $J(k)(l) \in J(k) \in A$ והוכחנו $\mathrm{Range}(H) \subseteq \bigcup A$. כעת אם

$A \ni Z \ni t$ אז קיים k כך ש- $Z = J(k)$ ו- $F(J(k))$ היא העתקה על Z, ולכן קיים $l \in \mathrm{Dom}(F(J(k))$ כך ש- $t = F(J(k))(l) = H(k,l)$, ו- $\bigcup A \subseteq \mathrm{Range}(H)$. לפי 105 $|\bigcup A| \le |B| \le \aleph_0$.

בעזרת אקסיומת הבחירה אנו יכולים גם להגדיר פעולות חיבור וכפל אינסופיות, כפי שנראה. תחילה נעשה מספר הכנות לכך.

107. **משפט**(אה"ב). לכל קבוצה W של מונים קיים חסם מלעיל, כלומר מונה b כך שלכל $a \in W$ קיים $b \ge a$.

המשפט יוכח בפרק מאוחר יותר.

108. **למה**(אה"ב). א. לכל קבוצה W של מונים קיימת פונקציה J שתחומה W כך שלכל $a \in W$ $J(a)$ היא קבוצה שעוצמתה a.

ב. לכל פונקציה R שערכיה הם מונים קיימת פונקציה H כך שלכל $x \in \mathrm{Dom}(R)$ $H(x)$ היא קבוצה שעוצמתה $R(x)$, ולכל $x, y \in \mathrm{Dom}(R)$ אם $x \ne y$ אז הקבוצות $H(x)$ ו- $H(y)$ זרות.

ג. לכל שתי פונקציות J_1 ו-J_2 כמו ב-א' קיימת פונקציה H שתחומה W וכך שלכל $a \in W$ $H(a)$ היא העתקה חח"ע של $J_1(a)$ על $J_2(a)$.

הוכחה. א. לפי 107 קיים חסם מלעיל b של W, ותהי B קבוצה שעוצמתה b. תהי C פונקצית בחירה על $P(B)$. נגדיר את J ע"י $J(a) = C(\{A \subseteq B \mid |A| = a\})$ לכל $a \in W$. עבור $a \in W$ הקבוצה $\{A \subseteq B \mid |A| = a\}$ אינה ריקה, לפי 67א', ולכן $J(a)$ הוא איבר שלה וקיים $|J(a)| = a$.

ב. תהי $W = \mathrm{Range}(R)$ ותהי J פונקציה כמו ב-א' עבור W זאת. נגדיר את H שתחומה $\mathrm{Dom}(R)$ ע"י $H(x) = \{x\} \times J(R(x))$.

ג. תהי T הפונקציה שתחומה W כך שלכל $a \in W$ $T(a)$ היא קבוצת כל ההעתקות החח"ע של $J_1(a)$ על $J_2(a)$. מכיוון ש- $|J_1(a)| = a = |J_2(a)|$ לכן $T(a)$ אינה ריקה. תהי C פונקצית בחירה על $\mathrm{Range}(T)$, ונגדיר, לכל $a \in W$, $H(a) = C(T(a))$, ולכן $H(a) \in T(a)$ ו-$H(a)$ היא העתקה חח"ע של $J_1(a)$ על $J_2(a)$.

109. **הגדרה**(אה"ב). יהיו a_i, עבור $i \in I$, מונים. נגדיר את סכומם $\sum_{i \in I} a_i$ כעוצמת הקבוצה $\bigcup_{i \in I} A_i$, היכן שלכל $i \in I$ A_i היא קבוצה שעוצמתה a_i, ול- $i, j \in I$ שונים $A_i \cap A_j = \emptyset$.

לפי 108ב' קיימת פונקציה A כזאת, והסכום מוגדר היטב כי אם נחליף את הקבוצות A_i בקבוצות B_i המקיימות אותן דרישות אז לפי 108ג' קיימת פונקציה H שתחומה I כך שלכל $i \in I$ $H(i)$ היא העתקה חח"ע של A_i על B_i ולכן, מכיוון שהקבוצות A_i, וכן הקבוצות B_i, זרות הדדית לכן $\bigcup_{i \in I} H(i)$ היא העתקה חח"ע של $\bigcup_{i \in I} A_i$ על $\bigcup_{i \in I} B_i$, והערך של הסכום אינו משתנה.

110. **משפט**. כשמחברים מונה a עם עצמו ומספר המחוברים הוא b אז הסכום הוא $a \cdot b$.

הוכחה. תהיינה A, I קבוצות שעוצמותיהן a, b. יהי $a_i = a$ ו- $A_i = A \times \{i\}$ לכל $i \in I$. ברור כי $|A_i| = |A| = a = a_i$ לכל $i \in I$, ועבור i-ים שונים ה-A_i-ים זרים. כמובן $\bigcup_{i \in I} A_i = A \times I$ ולכן $\sum_{i \in I} a = |\bigcup_{i \in I} A_i| = |A \times I| = a \cdot b$.

111. **הגדרה**. תהיינה A_i קבוצות, ל- $i \in I$. **המכפלה הקרטזית** $\times_{i \in I} A_i$ מוגדרת כקבוצת כל הפונקציות f שתחומן I והמקיימות, לכל $i \in I$, $f(i) \in A_i$.

112. **למה**. תהיינה A, B, H פונקציות שתחומן I כך שלכל $i \in I$ H_i היא העתקה חח"ע של A_i על B_i. קיימת העתקה חח"ע J של $\times_{i \in I} A_i$ על $\times_{i \in I} B_i$.

הוכחה. ל- $f \in \times_{i \in I} A_i$ נקח את $j(F)$ להיות הפונקציה g שתחומה I וכך שלכל $i \in I$ $g(i) = H(i)(f(i))$.

113. **הגדרה**(אה"ב). יהיו a_i, עבור $i \in I$, מונים. נגדיר את מכפלתם $\prod_{i \in I} a_i$ כעוצמת הקבוצה $\times_{i \in I} A_i$, היכן שלכל $i \in I$ A_i היא קבוצה שעוצמתה a_i.

לפי 108ב' קיימת פונקציה A כזאת, והסכום מוגדר היטב כי אם נחליף את הקבוצות A_i בקבוצות B_i המקיימות אותן דרישות אז לפי 108ג' קיימת פונקציה H שתחומה I כך שלכל $i \in I$ ‏ $H(i)$ היא העתקה חח"ע של A_i על B_i ולפי 112 קיימת העתקה חח"ע של $\times_{i\in I} A_i$ על $\times_{i\in I} B_i$, והערך של המכפלה אינו משתנה.

114. **משפט**. כשמכפילים מונה a עם עצמו ומספר הכופלים הוא b אז המכפלה היא a^b.

הוכחה. תהיינה A, I קבוצות שעוצמותיהן a, b. יהיו $a_i = a$ ו- $A_i = A$ לכל $i \in I$. ברור כי $a_i = a = |A| = |A_i|$ לכל $i \in I$. כמובן $\times_{i\in I} A_i = {}^I A$ ולכן $\prod_{i\in I} a = |\times_{i\in I} A_i| = |{}^I A| = a^b$.