קורס תורת הקבוצות – אביב תש"ס

פרק ג': השוואת קבוצות (גרסה 1, 11.5.2000)

47. **משפט**. הקבוצות הבאות של מספרים ממשיים שוות עוצמה זו לזו.
א. קבוצת המספרים הממשיים $\Re$.
ב. כל הקטעים הפתוחים $(a,b)=\{x\in\Re \mid a<x<b\}$.
ג. כל הקרניים הפתוחות $(a,\infty)=\{x\in\Re \mid a<x\}$ ו- $(-\infty,a)=\{x\in\Re \mid x<a\}$.
ד. כל הקטעים הסגורים $[a,b]=\{x\in\Re \mid a\le x\le b\}$.
ה. כל הקרניים הסגורות $[a,\infty)=\{x\in\Re \mid a\le x\}$ ו- $(-\infty,a]=\{x\in\Re \mid x\le a\}$.
ו. כל הקטעים החצי פתוחים $[a,b)=\{x\in\Re \mid a\le x<b\}$, ו- $(a,b]=\{x\in\Re \mid a<x\le b\}$.
הוכחה. נוכיח רק חלק משוויונות העוצמה.
הפונקציה $f(x)=c+\frac{x-a}{b-a}(d-c)$, מוגבלת ל-$(a,b)$ מעתיקה את (a,b) על (c,d).
הפונקציה $g(x)=\frac{1}{x}-1$ מוגבלת ל- $(0,1)$ מעתיקה את $(0,1)$ על הקרן $(0,\infty)$.
בנה משתי פונקציות הדומות ל-g פונקציה המעתיקה את $(-1,1)$ על $\Re$.
הפונקציה h הבאה, שתחומה $[-1,1]$ מעתיקה את $[-1,1]$ על $(-1,1)$.

$$h(x)=\begin{cases} \frac{x}{2} & \text{אם } |x|\in\{2^{-n}\mid n\in N\} \\ x & \text{אחרת} \end{cases}$$

48. **הגדרה**. א. $A\preceq B$ אם קיימת $F:A\to B$ חד חד ערכית.
ב. $A\prec B$ אםם $A\preceq B$ ו- $A\not\approx B$.
49. **למה**. א. $A\preceq B$ אםם ישנה $C\subseteq B$ כך ש- $A\approx C$.
ב. אם $A\subseteq B$ אז $A\preceq B$, ולכן תמיד $A\preceq A$, והיחס $\preceq$ הוא רפלקסיבי.
ג. אם $A\approx B$ אז $A\not\prec B$,ולכן תמיד $A\not\prec A$, והיחס $\prec$ הוא אירפלקסיבי.
ד. היחס $\preceq$ הוא טרנזיטיבי – אם $A\preceq B$ ו- $B\preceq C$ אז $A\preceq C$. [כי הרכבת פונקציות חח"ע נותנת פונקציה חח"ע.]
50. **למה**. א. אם B סופית ו- $A\prec B$ אז גם A סופית. אם A אינסופית ו- $A\prec B$ אז גם B אינסופית. [35].
ב. לכל $m,n\in N$ $N_m\preceq N_n$ אםם $m\le n$. [32]
ג. לכל $m,n\in N$ $N_m\prec N_n$ אםם $m<n$. [32]
ד. לכל $n\in N$ $N_n\prec N$. [הוכחת 32ד', או 32ד' ו-30ב'.]
51. **משפט**. לא קיימת העתקה של N על הקטע $(0,1)$, ולכן $N\prec(0,1)$ ובוודאי $N\prec\Re$.
הוכחה. נוכיח כי אם $F:N\to(0,1)$ אז F אינה על $(0,1)$. יהי $0.a_{n,0}a_{n,1}\ldots$ פיתוח לשבר עשרוני אינסופי של $F(n)$. נגדיר $b_n=a_{n,n}+1$ אם $a_{n,n}\le 7$ ו- $b_n=a_{n,n}-1$ אם $a_{n,n}\ge 8$. למספר $b=0.b_0b_1\ldots$ יש רק הצגה עשרונית אחת כי אף b_n אינו 0 ואינו 9. b שונה מכל $F(n)$, כי ההצגה העשרונית היחידה של b היא $0.b_0b_1\ldots$, ואילו הסיפרה ה-n $a_{n,n}$ של $F(n)$ שונה מן הסיפרה ה-n b_n של b. לכן b אינו בטווח F ו-F אינה העתקה על $(0,1)$.
52. **משפט קנטור**. לכל קבוצה A $A\prec P(A)$.
הוכחה. הפונקציה $F(x)=\{x\}$ היא העתקה חח"ע של A לתוך $P(A)$.
נראה כי אין העתקה של A על $P(A)$. לכל $F:A\to P(A)$ תהי $B=\{x\in A\mid x\notin F(x)\}$. נראה כי $B\notin\mathrm{Range}(F)$. נניח כי $B=F(y)$. אם $y\in B$ אז מכיוון ש- $B=F(y)$ אז $y\in F(y)$ ולפי הגדרת B

קיים $y \notin B$. אם $y \notin B$ אז מכיוון ש- $B = F(y)$ אז $y \notin F(y)$ ולפי הגדרת B קיים $y \in B$. כך בכל מקרה קיים גם $y \in B$ וגם $y \notin B$, וזאת סתירה.

53. **משפט קנטור-ברנשטיין**. אם $A \preceq B$ ו- $B \preceq A$ אז $A \approx B$.

הוכחה. תהיינה $F : A \to B$ ו- $G : B \to A$ חח"ע. נגדיר ברקורסיה $C_0 = B \setminus \operatorname{Range} F$, ולכל $n \in N$ $D_n = G[C_n]$, $C_{n+1} = F[D_n]$. ברור כי לכל $n \in N$ $C_n \subseteq B$ ו- $D_n \subseteq A$. יהי $D = \bigcup_{n\in N} D_n \subseteq A$. נגדיר

$$H(x) = \begin{cases} G^{-1}(x) & \text{אם } x \in D \\ F(x) & \text{אם } x \in A \setminus D \end{cases}$$

נראה כי H העתקה חח"ע של A על B, ולכן $A \approx B$.

H חח"ע: יהיו $x, y \in A$ $x \neq y$. אם $x, y \in D$ אז $H(x) = G^{-1}(x) \neq G^{-1}(y) = H(y)$ כי G^{-1} חח"ע. אם $x, y \in A \setminus D$ אז $H(x) = F(x) \neq F(y) = H(y)$ כי F חח"ע. אחרת, ללא הגבלת הכלליות $x \in D$ ו- $y \in A \setminus D$. נניח כי $H(x) = H(y)$, כלומר $G^{-1}(x) = F(y)$. הפעלת G על שני אגפי שיוויון זה נותנת $x = GF(y)$. $x \notin D_0$ כי אילו $x \in D_0$ אז, לפי הגדרת D_0 היה $x = G(z)$ עבור $z \in C_0$ כלשהו, ומכיוון ש- $G(z) = x = GF(y)$ היה $z = F(y)$, כי G חח"ע, וזה בסתירה לכך ש-z בהיותו ב-C_0 אינו בטווח F. מכיוון ש- x ב-D ואינו ב-D_0 לכן x ב-D_n עבור $n > 0$ כלשהו. לפי הגדרת D_n קיים $x = GF(z)$ עבור $z \in D_{n-1}$ כלשהו. קיים $GF(z) = x = GF(y)$, ומכיוון ש- F, G חח"ע לכן $y = z$, בסתירה לכך ש- $z \in D_{n-1} \subseteq D$ ו- $y \in A \setminus D$.

H על B: יהי $z \in B$. אם $z \in C_0$ אז $G(z) \in D_0$ ו- $H(G(z)) = G^{-1}(G(z)) = z$ ולכן $z \in \operatorname{Range} H$. אם $z \notin C_0$ אז $z \in \operatorname{Range} F$ ולכן $z = F(x)$ עבור $x \in A$ כלשהו. אם $x \in A \setminus D$ אז $H(x) = F(x) = z$, ו- $z \in \operatorname{Range} H$. אם $x \in D$ אז $x \in D_n$ עבור n כלשהו ולפי הגדרת C_{n+1} $z = F(x) \in C_{n+1}$. לכן $G(z) \in D_{n+1} \subseteq D$ ולכן $H(G(z) = G^{-1}(G(z)) = z$ ו- $z \in \operatorname{Range} H$.

הוכחה שונה במקצת. יהיו C_0 ו-D_0 כמו לעיל. תהי

$$D = \bigcap\{W \subseteq A \mid D_0 \subseteq W \wedge \text{W סגורה תחת GF}\}$$

ישנם W-ים כאלו, למשל A עצמה היא W כזה. לא קשה לראות כי הקבוצה D שהוגדרה כאן היא אותה הקבוצה D שהוגדרה בהוכחה הראשונה, אבל לא נזדקק לכך. $D \supseteq D_0$ כי D היא חיתוך של קבוצות המקיפות את D_0. כמו כן D סגורה תחת GF כי אם $x \in D$ אז $x \in W$ בכל W כנ"ל, ולכן גם $FG(x) \in W$, כי W סגורה תחת GF ולכן $FG(x) \in D$. תהי H הפונקציה שהוגדרה לעיל, עבור D הנוכחית.

H חח"ע. כמו לעיל די להראות כי אם $x \in D$ ו- $y \in A \setminus D$ אז $H(x) \neq H(y)$. נניח כי $H(x) = H(y)$, כלומר $G^{-1}(x) = F(y)$. הפעלת G על שני אגפי שיוויון זה נותנת $x = GF(y)$. $x \notin D_0$ כי אילו $x \in D_0$ אז, לפי הגדרת D_0 היה $x = G(z)$ עבור $z \in C_0$ כלשהו, ומכיוון ש- $G(z) = x = GF(y)$ היה $z = F(y)$, כי G חח"ע, וזה בסתירה לכך ש-z בהיותו ב-C_0 אינו בטווח F. כמו D הקבוצה $D \setminus \{x\}$ מקיפה את D_0, כי $x \notin D_0$, והיא סגורה תחת GF, כי x שהוצא ממנה הוא $GF(y)$ ו- $y \notin D$ ומכיוון ש-GF חח"ע x אינו $GF(z)$ עבור $z \in D$ כלשהו. כך ראינו ש- $D \setminus \{x\}$ היא אחת הקבוצות W דלעיל, בסתירה לכך ש-D היא החיתוך של כולן.

H על B: יהי $z \in B$. אם $z \in C_0$ אז $G(z) \in D_0$ ו- $H(G(z)) = G^{-1}(G(z)) = z$ ולכן $z \in \operatorname{Range} H$. אם $z \notin C_0$ אז $z \in \operatorname{Range} F$ ולכן $z = F(x)$ עבור $x \in A$ כלשהו. אם $x \in A \setminus D$ אז $H(x) = F(x) = z$, ו- $z \in \operatorname{Range} H$. אם $x \in D$ אז, כפי שראינו, גם $GF(x) \in D$, כלומר $G(z) \in D$. קיים אם כן $H(G(z)) = G^{-1}(G(z)) = z$, ו- $z \in \operatorname{Range} H$.

54. **מסקנה**. אם $A \prec B \prec C$ אז $A \prec C$. [ד'49 ו-53].

55. **הגדרה**. נסמן ב- ${}^{A}B$ את קבוצת כל הפונקציות מ-A ל-B.

56. **משפט**. לכל קבוצה A ולכל שני עצמים שונים T, F קיים $P(A) \approx {}^{A}\{T, F\}$.

הוכחה. נקרא ל-T **אמת** true ול-F **שקר** false. לכל $B \subseteq A$ תהי $f_B \in {}^{A}\{T, F\}$ הפונקציה שתחומה A הנתונה ע"י

$$f_B(x) = \begin{cases} T & \text{אם } x \in B \\ F & \text{אם } x \notin B \end{cases}$$

הפונקציה H הנתונה ע"י $H(B) = f_B$ היא העתקה חח"ע של $P(A)$ על ${}^{A}\{T, F\}$.

H חח"ע: אם $B, C \subseteq A$ ו- $B \neq C$ אז, ללא הגבלת הכלליות, קיים $y \in B \setminus C$. אז $f_B(y) = T \neq F = f_C(y)$ ולכן $H(B) = f_B \neq f_C = H(C)$.

H על ${}^{A}\{T, F\}$: תהי $g \in {}^{A}\{T, F\}$ ותהי $B = \{x \in A \mid g(x) = T\}$. אז, עבור $x \in A$, אם $g(x) = T$ אז $x \in B$ ולכן $f_B(x) = T = g(x)$, ואם $g(x) = F$ אז $x \notin B$ ולכן $f_B(x) = F = g(x)$. כך הוכחנו כי $g = f_B = H(B)$, ו-g הוא בטווח H.

57. **משפט**. $\Re \approx P(N)$.

הוכחה. הכוון $\Re \preceq P(N)$: נוכיח כי $\Re \preceq P(Q)$, היכן ש-Q היא קבוצת הרציונליים. לפי 43 $Q \approx N$, ולפי 28.1 $P(Q) \approx P(N)$ ולכן נקבל $\Re \preceq P(N)$. נגדיר F שתחומה $\Re$ ע"י $F(x) = \{r \in Q \mid r < x\} \in P(Q)$. מכיוון שבין כל שני ממשיים שונים יש מספר רציונלי F היא חד חד ערכית.

הכוון $P(N) \preceq \Re$: תהיינה k, l שתי ספרות שונות מבין הספרות 0 עד 9 ובלבד שאינן הספרות $0, 9$. לאור 56 די להוכיח ${}^{N}\{k, l\} \prec \Re$. נגדיר פונקציה $G : {}^{N}\{k, l\} \to \Re$ ע"י $G(f) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot 10^{-n}$. הצגת מספר ממשי כשבר עשרוני אינסופי היא יחידה פרט למקרה בו יש למספר ממשי שתי הצגות כאלו, באחת מופיע 0 ממקום מסויים ואילך ובשניה מופיע 9 ממקום מסויים ואילך. מכיוון שכאן $\{k, l\} \neq \{0, 9\}$ זה לא יכול לקרות עבור ערכי G ולכן G היא חד חד ערכית.