קורס תורת הקבוצות – אביב תש"ס

פרק ב': קבוצות סופיות ובנות מניה (גרסה 2, 10.5.2000)

27. **הגדרה**. אנו אומרים שהקבוצה A **שוות עוצמה** לקבוצה B ואנו כותבים $A \approx B$ אם קיימת $F : A \to B$ שהיא חד-חד ערכית ועל B.

יחס זה מאפשר לנו לומר מתי יש לשתי קבוצות שונות "אותו מספר" של איברים למרות שאיננו יודעים "לספור" את איבריהן, כמו במקרה של קבוצות אינסופיות.

28. **משפט**. יחס שוויון העוצמה $\approx$ הוא יחס שקילות, כלומר רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי. [נובע מ-26.]

28.1. **משפט**. אם $A \approx B$ אז גם $P(A) \approx P(B)$.

הוכחה. תהי F העתקה חח"ע של A על B. $H : P(A) \to P(B)$ הנתונה ע"י $H(Y) = F[Y]$ היא העתקה חח"ע של $P(A)$ על $P(B)$.

המספרים הטבעיים. נתייחס למספרים הטבעיים כידועים לנו, כולל יחס הסדר שלהם, הוכחה באינדוקציה, פעולות החשבון בהם, והגדרת פונקציות עליהם ברקורסיה. מאוחר יותר נגדיר את המספרים הטבעיים ונטפל לפחות בחלק מן הדברים בהם אנו משתמשים עתה.

האותיות k, l, m, n יסמנו תמיד מספרים טבעיים אלא אם נאמר אחרת, במפורש או במשתמע.

29. **הגדרה**. א. $N_n = \{m \mid m \in N,\ m < n\}$.

ב. ל- $n \in N$, אנו אומרים כי קבוצה A היא **בת n איברים** אם $A \approx N_n$.

ג. קבוצה A נקראת **סופית** אם היא בת n איברים ל-$n \in N$ כלשהו.

ד. קבוצה שאינה סופית נקראת **אינסופית**.

30. **מסקנות**. א. אם A קבוצה בת n איברים אז קבוצה B גם היא בת n איברים אסם $B \approx A$.

ב. קבוצה שוות עוצמה לקבוצה סופית גם היא סופית.

ג. קבוצה שוות עוצמה לקבוצה אינסופית גם היא אינסופית.

31. **משפט**. N_n אינה שוות עוצמה לאף קבוצה חלקית ממש שלה.

הוכחה. באינדוקציה על n. ל-0 זה מיידי. ל-$n+1$ תהי F העתקה חד חד ערכית של N_{n+1} על A שהיא חלקית ממש ל-N_{n+1}. נבנה העתקה חד חד ערכית G של N_n על קבוצה חלקית ממש לה, בניגוד להנחת האינדוקציה. אם $n \notin A$ או $F(n) = n$ נקח $G = F{\restriction}N_n$, ואחרת נקח $G = F{\restriction}N_n \cup \{\langle F^{-1}(n), F(n)\rangle\}$.

32. **מסקנות**. א. קבוצה סופית אינה שוות עוצמה לאף קבוצה חלקית ממש שלה.

ב. אם קבוצה היא שוות עוצמה לקבוצה חלקית לה אז היא אינסופית.

ג. ל- $n \neq m$ N_n ו- N_m אינן שוות עוצמה.

ד. כל קבוצה סופית היא בת n איברים ל- $n \in N$ יחיד.

ה. N היא אינסופית.

הוכחה ד'. הוכחה אחת: אם $N_n \approx N$ אז מכיוון ש- $N_n \subsetneq N$ זה סותר את א'.

הוכחה שניה: F שתחומה N הנתונה ע"י $F(x) = x + 1$ היא העתקה חח"ע של N על קבוצת הטבעיים החיוביים החלקית ממש ל-N.

33. **משפט**. א. אם A היא קבוצה בת n איברים ו- $x \notin A$ אז $A \cup \{x\}$ היא קבוצה בת $n+1$ איברים.

ב. אם A ו-B הן קבוצות סופיות (לאו דווקא זרות) אז $A \cup B$ גם היא סופית. [באינדוקציה על מספר איברי B.]

34. **משפט**. קבוצה A חלקית ל-N_n היא קבוצה בת m איברים ל- $m \leq n$ כלשהו, ו- $m < n$ אסם $A \subsetneq N_n$.

הוכחה. באינדוקציה על n. ל- $n+1$ תהי $B = A \cap N_n$, ואז $A = B$ או $A = B \cup \{n\}$. השתמש בהנחת האינדוקציה על B וב-33א'.

35. **מסקנות**. א. קבוצה חלקית לקבוצה סופית היא סופית.
ב. קבוצה המקיפה קבוצה אינסופית היא אינסופית.

36. **הגדרה**. קבוצה A נקראת **בת מניה** אם היא שוות עוצמה ל-N.

37. **משפט**. קבוצת המספרים השלמים Z היא בת מניה.

הוכחה. תהי F הפונקציה על N המוגדרת ע"י $F(n) = n/2$ ל-n זוגי ו- $F(n) = -(n+1)/2$ ל-n איזוגי. F היא העתקה חח"ע של N על Z.

38. **משפט**. א. N היא בת מניה.
ב. כל קבוצה בת מניה היא אינסופית.
ג. כל שתי קבוצות בנות מנייה הן שוות עוצמה.
ד. לכל $n \in N$ הקבוצה $N \setminus N_n = \{m \mid m \geq n\}$ היא בת מנייה.
ה. אם A קבוצה בת מניה אז $A \cup \{x\}$ בת מניה.
ו. אחוד של קבוצה בת מניה A וקבוצה סופית B הוא קבוצה בת מניה.
ז. קבוצת הטבעיים הזוגיים וקבוצת הטבעיים האיזוגיים הן בנות מניה.
ח. אחוד של שתי קבוצות בנות מניה זרות הוא קבוצה בת מניה. (יותר מאוחר נראה שתנאי הזרות מיותר).

הוכחה. ו. הוכח באינדוקציה על מספר איברי B, תוך שימוש ב-ה' או השתמש בכך ש- $A \cup B$ שווה לאחוד של הקבוצות הזרות A ו- $B \setminus A$ והשתמש ב-35א' וב-ד'.

38.1 **משפט**. אם $A \approx B \subsetneq A$ אז יש ל-A קבוצה חלקית בת מניה.

הוכחה. תהי F העתקה חח"ע של A על B, ויהי $a \in A \setminus B$. נגדיר ברקורסיה $G : N \to A$ ע"י $G(0) = a$ ו- $G(n+1) = F(G(n)) \in B$. נוכיח כי G היא חח"ע ולכן $\mathrm{Range}\, G$ היא קבוצה בת מניה. די להוכיח כי אם $k < l$ אז $G(k) \neq G(l)$, ונעשה זאת באינדוקציה על k. עבור $k = 0$ קיים $G(0) = a \in A \setminus B$, ו- $G(l) = F(G(l-1)) \in B$, ולכן $G(l) \neq G(0)$. עבור $k > 0$ קיים, לפי הנחת האינדוקציה, $G(k-1) \neq G(l-1)$, ומכיוון ש-F חח"ע לכן $G(k) = F(G(k-1)) \neq F(G(l-1)) = G(l)$.

39. **משפט**. $N \times N$ היא קבוצה בת מניה.

הוכחה. ספירת איברי $N \times N$ לאורך האלכסונים בשריג הנקודות $N \times N$ במישור הקרטזי נותנת לנקודה k, l את המספר $(k+l+1)(k+l)/2 + k$. בדיקה ישירה מראה שהפונקציה $F(k,l) = (k+l+1)(k+l)/2 + k$ היא העתקה חח"ע של $N \times N$ על N.

40. **מסקנה**. אם A ו-B הן בנות מניה גם $A \times B$ היא בת מניה.

41. **משפט**. אם A היא קבוצה חלקית לא חסומה של N אז A בת מניה.

הוכחה. נגדיר ברקורסיה פונקציה F על N כדלקמן. $F(0)$ הוא האיבר המזערי של A. $F(n+1)$ הוא האיבר המזערי ב-A הגדול מ-$F(n)$. יש איבר כזה כי A אינה חסומה. ברור כי $F : N \to A$. כדי להוכיח כי F היא על A מוכיחים באינדוקציה על n כי $A \cap \{x \mid x \leq F(n)\} = \{F(0), \ldots, F(n)\}$.

42. **מסקנות**. א. כל קבוצה חלקית ל-N היא סופית אם היא חסומה, ובת מניה אם אינה חסומה.
ב. קבוצה חלקית של קבוצה בת מניה היא סופית או בת מניה.
ג. אם A ו-B בנות מניה גם $A \cup B$ בת מניה.
ד. אם כ"א מ-A ו-B היא סופית או בת מניה גם $A \cup B$ כן.
ה. לפונקציה F, אם $\mathrm{Dom}\, F$ קבוצה בת מניה אז $\mathrm{Range}(F)$ היא קבוצה סופית או בת מניה.

הוכחה. ג. $A \cup B$ היא האחוד של הקבוצות הזרות A ו- $B \setminus A$. $B \setminus A$ היא, לפי ב', סופית או בת מניה. כעת השתמש ב-38ו' ו-38ח'.

ה. אפשר להניח $\mathrm{Dom}\, F = N$. נגדיר פונקציה G שתחומה $\mathrm{Range}\, F$ וכך שלכל $y \in \mathrm{Range}\, F$ $G(y)$ הוא המספר הטבעי המזערי n כך ש- $F(n) = y$. G היא העתקה חח"ע של $\mathrm{Range}\, F$ על קבוצה חלקית ל-N.

43. **משפט**. קבוצת המספרים הרציונליים Q היא בת מניה.

הוכחה. תהי $F : Q \to Z \times N$ הפונקציה כך שלכל מספר רציונלי z $F(z) = \langle k, l \rangle$ היכן ש- k ו- l הם המספרים הטבעיים היחידים כך ש- $z = \frac{k}{l}$, k ו-l זרים ו- $l > 0$. F היא חח"ע ולכן Q שוות עוצמה ל- $\mathrm{Range}\, F$. $\mathrm{Range}\, F$ החלקית ל- $Z \times N$. $\mathrm{Range}\, F$ היא סופית או בת מניה לפי 37, 40 ו-42ב', ולכן גם Q כן. Q אינה סופית כי $N \subseteq Q$ ולכן Q היא בת מניה.

44. **הגדרה**. א. בשם **n-יה**, או **n-יה סדורה**, נקרא לפונקציה שתחומה N_n. בשם רכיבי ה-n-יה x נקרא לערכים $x(0), x(1), \ldots, x(n-1)$, שנסמנם גם ב- $x_0, \ldots, x_{n-1}$. n-יה שכל רכיביה הם איברים של A נקראת n-יה של איברי A. לקבוצה A נסמן ב-A^n את קבוצת ה-n-יות של איברי A.

מושג ה-2-יה אינו זהה למושג הזוג הסדור, כי ה-2-יה שרכיביה הם x ו-y היא $\{\langle 0, x \rangle, \langle 1, y \rangle\}$ והזוג הסדור עם אותם רכיבים הוא $\langle x, y \rangle$. עם זאת ה-2-יה ממלאת אחר תכונת הזוג הסדור (16) ולכן היא יכולה לשמש במקום הזוג הסדור, ומכאן ואילך לא נבחין בין הזוג הסדור $\langle x, y \rangle$ לבין ה-2-יה $\{\langle 0, x \rangle, \langle 1, y \rangle\}$.

נשים לב שישנה בדיוק 0-יה אחת $\langle\rangle$ שהיא הקבוצה הריקה. פעמים רבות גם לא נבחין בין העצם x לבין ה-1-יה $\langle x \rangle$.

ב. את ה-n-יה שרכיביה, לפי הסדר הם $x_0, \ldots, x_{n-1}$, נסמן ב- $\langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle$. לאור מה שנאמר ב-א', הדו-משמעותיות של סימון זה כאשר $n = 2$ אינה צריכה להפריע.

ג. **סידרה סופית** זאת n-יה עבור $n \in N$ כלשהו. ל-n נקרא בשם **אורך** הסידרה. סידרה סופית של איברי A זאת סידרה סופית שכל רכיביה הם איברי A.

ד. לכל פונקציה F ו-n-יה $\langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle$ נכתוב $F(x_0, \ldots, x_{n-1})$ עבור $F(\langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle)$.

45. **משפט**. א. ל-$n > 0$ קבוצת ה-n-יות של איברי קבוצה בת מניה היא בת מניה.

ב. קבוצת כל הסדרות הסופיות של איברי קבוצה בת מניה היא בת מניה.

הוכחה. א. תהי A בת מניה. לפי 40 קיימת העתקה חח"ע P של $A \times A$ על A. נגדיר, עבור $n > 0$ את הפונקציה P_n ברקורסיה על n כפונקציה שתחומה A^n ע"י $P_1(\langle x \rangle) = x$ ו- $P_{n+1}(x_0, \ldots, x_n) = P(P_n(x_0, \ldots, x_{n-1}), x_n)$. באינדוקציה על n מוכיחים כי P_n היא העתקה חח"ע של A^n על A.

ב. די להוכיח את המשפט עבור $A = N$. תהי Q הפונקציה על קבוצת הסדרות הסופיות A^* של איברי A הנתונה ע"י $Q(\langle\rangle) = 0$ ולכל n-יה x $Q(x) = P(n, P_n(x)) + 1$. Q היא העתקה חח""ע של A^* על A.

הוכחה אחרת, המסתמכת הרבה יותר על התכונות של הפעולות על המספרים הטבעיים, היא להגדיר פונקציה חח"ע F מ-N^* לתוך N ע"י $F(x_0, \ldots, x_{n-1}) = p_0^{x_0+1} p_1^{x_1+1} \ldots p_{n-1}^{x_{n-1}+1}$, היכן ש-$p_k$ הוא המספר הראשוני ה- $k+1$.

46. **משפט**. קבוצת המספרים האלגבריים היא בת מניה.

הוכחה. כל מספר אלגברי הוא שורש של פולינום p עם מקדמים שלמים ממעלה $n > 0$ כלשהי. ל-p יש לכל היותר n שורשים, נסמן את מספרם ב- m_p. נסדר אותם בסדר שיטתי כלשהו (למשל, לפי הסדר של הרכיב הממשי שלהם, ואת השורשים עם אותו רכיב ממשי נסדר לפי הרכיב הדימיוני) ותהי f_p הפונקציה המעתיקה את $\{0, \ldots, m_p - 1\}$ על קבוצת שורשי p לפי הסדר שלהם. תהי W קבוצת הזוגות $\langle a, k \rangle$ היכן ש- a היא סידרה באורך > 1 של מספרים שלמים שרכיבה הראשון אינו 0 ו- k מספר טבעי קטן ממספר השורשים של הפולינום שסדרת מקדמיו היא a. תהי F הפונקציה שתחומה W ושלכל $\langle a, k \rangle \in W$ $F(a, k)$ הוא השורש ה- k-י של הפולינום p שסידרת מקדמיו היא a, כלומר $F(a, k) = f_p(k)$. F היא העתקה של W על קבוצת המספרים האלגבריים. $W \subseteq Z^* \times N$, היכן ש- Z^* היא קבוצת כל הסדרות של המספרים השלמים. $Z^* \times N$ היא בת מניה, לפי 37, 45 ו-40. ברור ש-W אינה סופית ולכן W היא בת מניה. לפי 42ה' קבוצת המספרים האלגבריים היא סופית או בת מניה, אולם היא אינה סופית כי היא מקיפה את N.