קורס תורת הקבוצות – אביב תש"ס

פרק א': מושגי יסוד (גרסה 3, 10.5.2000)

מדוע עוסקים בתורת הקבוצות?

א. תורות מתמטיות רבות עוסקות במידה משמעותית בקבוצות.

ב. תורת הקבוצות יכולה לשמש כמסגרת לפיתוח אקסיומטי של כל המתמטיקה.

ג. זה כיף.

המושג האינטואיטיבי של הקבוצה: אוסף כלשהו של עצמים היכול לשמש בעצמו עצם מתמטי.

1. **אקסיומת ההיקפיות**. אם לקבוצות A ו-B אותם האיברים, כלומר אם לכל x קיים $x \in A$ אסם $x \in B$, אז $A = B$.

אקסיומה זאת מציגה את האופי ההיקפי (אקסטנציונלי) של הקבוצות בניגוד לאופי הכוונתי (אינטנסיונלי) של התכונות.

2. **אקסיומות הקיום הבסיסיות**. בהנתן תכונה Φ קיימת קבוצה המכילה בדיוק את כל העצמים בעלי התכונה Φ.

ההבדלים בין תכונה לקבוצה הם שתכונה היא יצור של השפה בעוד שקבוצה היא עצם מתמטי, וגם, כנזכר לעיל, שקבוצה היא בעלת אופי אקסטנציונלי, בניגוד לתכונה.

אנו מדברים כאן על אקסיומות ולא על אקסיומה בודדת כי לכל תכונה Φ יש לנסח בנפרד אקסיומה המתאימה לתכונה זאת.

3. **משפט**. לתכונה Φ קיימת, לפי 1, לכל היותר קבוצה אחת המכילה בדיוק את כל העצמים שהם בעלי התכונה Φ, ולכן, לאור 2, קיימת בדיוק קבוצה אחת המכילה בדיוק את כל העצמים שהם בעלי התכונה Φ. קבוצה זאת מסומנת ב- $\{x \mid \Phi(x)\}$.

4. **אנטינומית רסל**. לא קיימת קבוצה Y המכילה בדיוק את הקבוצות x המקיימות $x \notin x$. זאת סתירה לאקסיומה מתוך 2.

$Y \in Y$ אסם $Y \notin Y$, ולכן $Y \in Y$ וגם $Y \notin Y$, סתירה.

5. לאור 4 נשתמש באקסיומות 2 רק היכן שלא נראה שתיגרמנה בעיות, וקו מנחה תהיה הדוקטרינה האינטואיבית של **הגבלת הגודל** האומרת שאפשר להשתמש באקסיומה מתוך 2 כל עוד היא נותנת קבוצה שאינה גדולה מדי בהשוואה לקבוצות קיימות.

6. **מחלקות**. גם היכן שתכונה Φ אינה קובעת קבוצה נדבר על מחלקת כל העצמים שהם בעלי התכונה Φ. בניגוד לקבוצה מחלקה אינה עצם מתמטי. הדיבור על מחלקה הוא בעצם דיבור על תכונה, אולם אנו מעדיפים להשתמש במחלקות במקום בתכונות היכן שאנו מעוניינים לא בניסוח של התכונה אלא בעצמים המקיימים אותה. את המחלקת העצמים בעלי התכונה Φ נסמן גם ב- $\{x \mid \Phi(x)\}$. חלק מן המחלקות הן קבוצות, ולמחלקות שאינן קבוצות נקרא **מחלקות ממש**. נפגוש בהמשך מספר אקסיומות האומרות שלתכונות מסויימות אמנם מתאימות קבוצות, והן תאמרנה, במילים אחרות, שמחלקות מסויימות הן קבוצות.

7. **השפה**. מכיוון שהתכונות אותן אנו יכולים להביע תלויות בשפה בה אנו משתמשים חשוב לומר משהו על השפה. אם לא נבהיר במה מותר ובמה אסור להשתמש בשפת תורת הקבוצות, אנו עלולים להיתקל לא רק בביטויים חסרי משמעות, כמו "קבוצת כל הקבוצות הירוקות" אלא אף להגיע לסתירה בדרך הבאה. נתבונן בביטוי "המספר הקטן ביותר שאי אפשר להגדירו בפחות מעשרים מילים בשפה העברית". מספר הביטויים בעלי פחות מעשרים מילים בשפה העברית הוא סופי, ולכן קיים מספר כזה, וכמובן שהגדרנו אותו בפחות מעשרים מילים, וזאת סתירה. סתירה זאת נובעת מכך שהשפה לא הוגדרה היטב. לכן, כדי למנוע סתירות

כאלו נגדיר כאן היטב את השפה.

השפה בה נשתמש מכילה משתנים $A, B, \ldots, x, y, \ldots$ ומשתנים אחרים, סימני יחס $=$ ו-$\in$, קשרים לוגיים "או", "וגם", "אם . . . אז", "אם ורק אם" ו-"לא", כמתים "לכל" ו-"קיים" והתכונה "קבוצה". לשפה זאת נקרא "שפת תורת הקבוצות" ונעשיר אותה ע"י הגדרות של המושגים החדשים שנכניס לשפה. השפה תכיל בנוסף את המילים "מספר טבעי, שלם, רציונלי, אלגברי, ממשי, מרוכב" ואת הסימנים עבור יחס הסדר ופעולות החשבון במספרים אלו. את כל הרכיבים הנוספים הללו אפשר להגדיר בשפת תורת הקבוצות ולכן אין צורך בהם בשפה הבסיסית. בהמשך נביא לפחות חלק מהגדרות אלו.

8. **הגדרה**. אנו אומרים שמחלקה A היא **מחלקה חלקית** של מחלקה B, או **תת מחלקה** של B, אם כל איבר של A הוא איבר של B, ומסמנים זאת ב- $A \subseteq B$. אם A היא קבוצה אנו אומרים שהיא **קבוצה חלקית** של B, או **תת-קבוצה** של B.

ב. אנו אומרים שמחלקה A היא **מחלקה חלקית ממש** של מחלקה B אם A חלקית ל-B אבל אינה שווה לה, ומסמנים זאת ב- $A \subsetneq B$.

9. **משפט**. לכל המחלקות A, B, C קיים:

א. $\emptyset \subseteq A$.

ב. $A \subseteq A$.

ג. $A, B \subseteq A \cup B$, $A \cap B \subseteq A, B$.

10. **משפט**. אם לקבוצות A, B $A \subseteq B$ ו- $B \subseteq A$ אז $A = B$ (זהו ניסוח אחר של אקסיומת ההיקפיות 1).

11. **אקסיומות ההפרדה**. בהינתן תכונה Φ קיימת לכל קבוצה A קבוצה B המכילה בדיוק את איברי A שהם בעלי התכונה Φ. נוסח אחר של אקסיומות אלו הוא שכל מחלקה חלקית לקבוצה A גם היא קבוצה.

12. **משפט**. מחלקת כל הקבוצות V היא מחלקה ממש (או, לא קיימת קבוצה שהיא קבוצת כל הקבוצות).
הוכחה. אילו היתה V קבוצה אז, לפי 11, היתה גם המחלקה של אנטינומית רסל קבוצה.

13. **הגדרה**. נגדיר כעת מספר מחלקות. בהמשך נראה שחלקן הן קבוצות.

א. הקבוצה הריקה – $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$.

ב. קבוצת יחידה – $\{a\} = \{x \mid x = a\}$.

ג. זוג (לא סדור) – $\{a, b\} = \{x \mid x = b \text{ או } x = a\}$.

ד. A אחוד B – $A \cup B = \{x \mid x \in B \text{ או } x \in A\}$.

ה. A חיתוך B – $A \cap B = \{x \mid x \in B \text{ -ו } x \in A\}$.

ו. A מינוס B – $A \setminus B = \{x \mid x \notin B \text{ -ו } x \in A\}$.

ז. האיחוד של A – $\bigcup A = \{x \mid x \text{ הוא איבר של איבר כלשהו של } A\}$.

14. **אקסיומות**. א. **אקסיומת הזוג**. לכל העצמים a, b קיימת קבוצה המכילה בדיוק את a ואת b, במילים אחרות, המחלקה $\{a, b\}$ היא קבוצה.

ב. **אקסיומת האחוד**. אם A היא קבוצה אז גם $\bigcup A$ היא קבוצה.

ג. **אקסיומת האינסוף**. מחלקת המספרים הטבעיים N היא קבוצה.

15. **משפט**. א. $\emptyset$ היא קבוצה. [11 עם התכונה $x \neq x$, כאשר קיום קבוצה כלשהי נובע, למשל, מ-14ג'].

ב. אם A ו-B קבוצות אז $A \cup B$ קבוצה. [13ג' ו-13ז'].

ג. אם A קבוצה ו-B מחלקה אז $A \cap B$ קבוצה [לפי 11].

16. **תכונת הזוג הסדור**. אם $\langle u, v\rangle = \langle x, y\rangle$ אז $x = u$ ו- $y = v$.
הכוון ההפוך הוא אמת לוגית.

17. **הגדרה**. $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

18. **משפט**. הזוג הסדור, כפי שמושג זה הוגדר ב-17 מקיים את התכונה של 16.

מה שחשוב לגבי מושג הזוג הסדור הוא שהוא מקיים את 16, וכל הגדרה אחרת של מושג זה המקיימת את 16 טובה באותה מידה.

19. **מושג היחס** (הדו-מקומי). יחס הוא כמו קבוצה אבל הוא מתייחס תמיד לזוג איברים ולא לאיבר בודד. כך אם R הוא יחס, אז שני עצמים x ו- y יכולים להיות או לא להיות ביחס R. נכתוב xRy כשנרצה לומר כי x נמצא ביחס R ל-y.

20. **הגדרה**. א. **יחס** הוא מחלקה שכל איבריה זוגות סדורים. מחלקה זאת יכולה להיות קבוצה, ואז היחס הוא עצם מתמטי.

ב. נכתוב xRy עבור $\langle x,y\rangle \in R$.

ג. **תחום** היחס R, המסומן ב- $\operatorname{Dom} R$ הוא המחלקה $\{x \mid$ קיים y כך ש- $xRy\}$.

ד. **טווח** היחס R, המסומן ב- $\operatorname{Range} R$ הוא המחלקה $\{y \mid$ קיים x כך ש- $xRy\}$.

21. **הגדרה תיקנית של יחס**. תהי $\Phi(x,y)$ תבנית פסוק האומרת משהו על x ו-y אז $\{z \mid \Phi(x,y)$ ו- $z = \langle x,y\rangle$ קיימים x,y כך ש- $\}$ הוא היחס R כך שלכל x,y קיים xRy אםם מתקיים $\Phi(x,y)$. את היחס הזה נכתוב כ- $\{\langle x,y\rangle \mid \Phi(x,y)\}$ ולזאת נקרא ההגדרה התיקנית של היחס.

21א'. **הגדרה**. $A \times B$ היא היחס $\{\langle x,y\rangle \mid x \in A\ ,\ y \in B\}$

22. **מושג הפונקציה**. פונקציה היא משהו המתאים לכל איבר x של מחלקה A, הנקראת תחום הפונקציה, עצם כלשהו.

23. **הגדרה**. א. **פונקציה** היא יחס חד ערכי, כלומר יחס F כך שלכל x,y,z, אם xFy ו- xFz אז $z = y$.

ב. לכל $x \in \operatorname{Dom} F$ אנו מסמנים ב- $F(x)$ את ה-y היחיד המקיים xFy. אם $x \notin \operatorname{Dom} F$ אז נאמר ש- $F(x)$ אינו מוגדר.

ג. אנו כותבים $F : A \to B$, ואומרים גם ש-F היא **העתקה** מ-A ל-B אם F היא פונקציה שתחומה A ושטווחה חלקי ל-B (כלומר לכל $x \in A$ קיים $F(x) \in B$).

ד. אנו אומרים שהפונקציה F היא **על** קבוצה B אם $\operatorname{Range} F = B$, כלומר אם לכל $y \in B$ קיים $x \in \operatorname{Dom} F$ כך ש- $F(x) = y$.

ה. פונקציה F נקראת **חד-חד ערכית** (חח"ע) אם לכל $x,y \in \operatorname{Dom} F$, אם $x \neq y$ אז $F(x) \neq F(y)$, ובמלים אחרות, אם $F(x) = F(y)$ אז $x = y$.

ו. עבור $A \subseteq \operatorname{Dom} F$ אנו מסמנים ב- $F[A]$ את $\{F(x) \mid x \in A\}$, שהיא קבוצת הערכים ש-F מקבלת עבור איברי A.

24. **ההגדרה התיקנית של פונקציה**. תהי A מחלקה ותהי $\Phi(x,y)$ תבנית פסוק כך שלכל $x \in A$ ישנו בדיוק y אחד המקיים $\Phi(x,y)$ אז היחס $F = \{\langle x,y\rangle \mid x \in A \wedge \Phi(x,y)\}$ הוא פונקציה המקיימת $\operatorname{Dom}(F) = A$, ולכל $x \in A$ $F(x)$ הוא ה-y המקיים $\Phi(x,y)$, והוא הפונקציה היחידה המקיימת תנאים אלו.

בשם הגדרה תיקנית של פונקציה F נקרא להגדרה מהצורה: $\operatorname{Dom}(F) = A$, ולכל $x \in A$ $F(x)$ הוא ה-y המקיים $\Phi(x,y)$.

אם התבנית $\Phi(x,y)$ היא מהצורה $y = \tau(x)$, היכן ש-$\tau(x)$ הוא שם עצם התלוי ב-x, כמו $\{x\}$ או $x \cap B$, אז ההגדרה התיקנית של F היא בעלת הצורה $\operatorname{Dom}(F) = A$, ולכל $x \in A$ $F(x) = \tau(x)$.

24א'. **הגדרה**. תהי F פונקציה ו- $A \subseteq \operatorname{Dom} F$. נסמן ב- $F \restriction A$ את הפונקציה המוגדרת ע"י $\operatorname{Dom} G = A$, ולכל $x \in A$ $G(x) = F(x)$. $F \restriction A$ נקראת **ההגבלה** של F ל-A.

25. **הגדרה**. א. לכל מחלקה A **פונקצית הזהות** 1_A על A היא הפונקציה הנתונה ע"י $\operatorname{Dom}(1_A) = A$, ולכל $x \in A$ $1_A(x) = x$.

ב. אם $F : A \to B$ ו- $G : B \to C$ אז **ההרכבה** של פונקציות אלו היא הפונקציה GF הנתונה ע"י:

$\mathrm{Dom}(GF) = A$, ולכל $x \in A$ ‏ $(GF)(x) = G(F(x))$. ברור כי $GF : A \to C$.

ג. אם F היא פונקציה חד חד ערכית מ- A על B אז **הפונקציה ההפוכה** F^{-1} היא הפוקציה הנתונה ע"י $\mathrm{Dom}(F^{-1}) = B$ ולכל $y \in B$ ‏ $F^{-1}(y)$ הוא ה-x כך ש- $F(x) = y$. ברור כי $F^{-1} : B \to A$.

26. **משפט**. א. 1_A היא העתקה חד חד ערכית של A על A.

ב. אם $F : A \to B$ היא העתקה על B ו- $G : B \to C$ היא העתקה על C אז $GF : A \to C$ היא העתקה על C.

ג. אם $F : A \to B$ ו- $G : B \to C$ הן חד חד ערכיות אז גם GF חד חד ערכית.

ד. אם F היא העתקה חד חד ערכית של A על B, אז F^{-1} היא העתקה חד חד ערכית של B על A.

26.1 **הגדרה**. אנו אומרים שהפונקציות F ו-G **מתיישבות** אם לכל $x \in \mathrm{Dom}\, F \cap \mathrm{Dom}\, G$ קיים $F(x) = G(x)$.

26.2 **למה**. א. הפונקציות F ו-G מתיישבות אםם $F \cup G$ היא פונקציה.

ב. אם F, G פונקציות שתחומיהן זרים אז $F \cup G$ היא פונקציה.

ג. תהי W קבוצה של פונקציות. $\bigcup W$ היא פונקציה אםם כל שתי פונקציות ב-W הן מתיישבות.