

1. מצא את הקו $y = ax + b$ שהוא הקירוב הכי טוב (במובן של ריבועים מזעריים) לנתונים הבאים:

x_n	1	2	3	4	5	6	7
y_n	1.1	2.3	4.9	6.2	7.2	8.6	9.5

2. מצא את הפרבולה $y = a + bx + cx^2$ שהוא הקירוב הכי טוב (במובן של ריבועים מזעריים) לנתונים הבאים:

x_n	1	2	3	4	5	6	7	8
y_n	0.5	-0.3	-1.2	-0.9	0.2	2.4	4.0	7.5

יש למצוא את a, b, c

(א) בהנחה שנותנים משקל שווה לכל הנקודות.

(ב) בהנחה שנותנים משקל 0.5 לשתי הנקודות הקיצוניות מימין ושתי הנקודות הקיצוניות משמאל, ומשקל 1.0 ל-4 נקודות באמצע.

(ג) בהנחה שנותנים משקל 1.0 לשתי הנקודות הקיצוניות מימין ושתי הנקודות הקיצוניות משמאל, ומשקל 0.5 ל-4 נקודות באמצע.

בדוק את הרגישות של a, b, c לשינויים קלים בנתונים. (כלומר: אם משנים אחד הנתונים על ידי 1%, בכמה אחוז זה משנה את a, b, c ?)

3. אם $y = ax + b$ הוא הקו הישר שמקבלים בקירוב של ריבועים מזעריים לנקודות $\{(x_i, y_i)\}$ (כאשר לנקודה (x_i, y_i) מייחסים משקל w_i), מצא:

(א) את הקו שמקבלים בקירוב של ריבועים מזעריים לנקודות $\{(x_i + t, y_i + s)\}$ (כלומר, אותם נקודות אחרי הזזה).

(ב) את הקו שמקבלים בקירוב של ריבועים מזעריים לנקודות $\{(sx_i, ty_i)\}$ (כלומר, אותם נקודות אחרי הגדלה/הקטנה).

(ג) את הקו שמקבלים בקירוב של ריבועים מזעריים לנקודות

$$\{(x_i \cos \theta + y_i \sin \theta, y_i \cos \theta - x_i \sin \theta)\}$$

(כלומר, אותם נקודות אחרי סיבוב). אזהרה - סעיף זה הוא לא כל כך קל!

4. (א) מצא את הפולינום $p(x)$ מדרגה 4 או פחות שהוא הקירוב הכי טוב לפונקציה $e^x \sin x$ על הקטע $[-1, 1]$, במובן שסכום השאריות

$$S = \int_{-1}^1 (e^x \sin x - p(x))^2 dx$$

הוא כמה שאפשר יותר קטן. העזר ב-Maple!

(ב) מצא את הפולינום $p(x)$ מדרגה 4 או פחות שהוא הקירוב הכי טוב לפונקציה $f(x) = (1 - |x|)/(1 + x^2)$ על הקטע $[-1, 1]$, במובן שסכום השאריות

$$S = \int_{-1}^1 (f(x) - p(x))^2 dx$$

הוא כמה שאפשר יותר קטן. העזר ב-Maple!

(ג) מצא את הפולינום $p(x)$ מדרגה 4 או פחות שהוא הקירוב הכי טוב לפונקציה \sqrt{x} על הקטע $[1, 9]$, במובן שסכום השאריות

$$S = \int_1^9 (\sqrt{x} - p(x))^2 dx$$

הוא כמה שאפשר יותר קטן. העזר ב-Maple!

5. רוצים לעשות קירוב לפונקציה $\sin x$ בקטע $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ על ידי פולינום מהצורה

$$ax + bx^3 + cx^5$$

. השווה את 3 הקירובים הבאים על ידי בדיקת צורת הגרף של $|\sin x - ax - bx^3 - cx^5|$:

(א) הקירוב שמקבלים מטור טיילור, $a = 1, b = -\frac{1}{6}, c = \frac{1}{120}$

(ב) הקירוב שמקבלים על ידי שיטת ריבועים מזעריים עם פונקצית משקל $w(x) = 1$

(ג) הקירוב $a = 0.999695, b = -0.165670, c = 0.00751339$ (מקבלים את זה מריבועים מזעריים עם $w(x) = (\pi^2 - 4x^2)^{-\frac{1}{2}}$)