

1. לנתונים

x_i	0	1	2	4
y_i	1.2	2.1	2.3	0.5

- (א) כתוב את פולינום הביון (פולינום האינטרפולציה) בצורת Lagrange.
 (ב) מצא את פולינום הביון (פולינום האינטרפולציה) בצורת Newton.
 (ג) מצא את ה-linear spline המחבר את הנתונים.

מצא את הערכים של פולינום הביון וה-linear spline ב- $x = 3$. איך היית משתמש ב-Matlab או Scilab כדי למצוא את הערך ב- $x = 3$ של ה-cubic spline המחבר את הנתונים?

2. א. מצא את הפולינום היחיד $p(x)$ מדרגה 2 או פחות כך ש- $p(0) = 0, p(a) = b, p(1) = 1$. כאשר $0 < a < 1$.

ב. הסבר למה הפולינום $p(x)$ שמצאת בסעיף א. אינו מונוטוני עולה על הקטע $0 \leq x \leq 1$ אם $b < 0$ או $b > 1$. על ידי בדיקת המקרה $a = 1/2, b = 5/6$ הראה שגם אם $0 < b < 1$ ייתכן ש- $p(x)$ אינו מונוטוני עולה.

ג. הוכח שהפולינום שמצאת בסעיף א. הוא מונוטוני עולה על הקטע $0 \leq x \leq 1$ אם ורק אם $a^2 < b < a(2 - a)$.

3. א. מצא את פולינום הביון $p(x)$ עבור הנתונים הבאים:

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	-1	α	1	2

כאשר α הוא מספר ממשי כל שהוא.

ב. הוכח שהפולינום $p(x)$ שמצאת בסעיף א. מקיים $p'(0) = 1$ ומצא עוד שני ערכים של x , חוץ מ-0, כך ש- $p'(x) = 1$.

ג. איך נראה הגרף של $p(x)$? יש לצייר בשלושת המקרים $\alpha > 0, \alpha = 0, \alpha < 0$.

4. א. יהא $p(x)$ פולינום הביון עבור הנתונים

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a

כאשר a הוא פרמטר ממשי. מצא את ההתנהגות של $p(0.5)$ - $p(5.5)$ כפונקציות של a .

ב. יהא cubic spline $p(x)$ עבור הנתונים

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a

כאשר a הוא פרמטר ממשי. מצא, על ידי ניסוי במחשב, את ההתנהגות של $p(0.5)$ - $p(5.5)$ כפונקציות של a עבור a (מספיק לקחת a בין 0 ל-50000).

ג. מה היא המשמעות של התוצאות שמצאת בסעיפים הקודמים לגבי רגישות פולינום הביון לרגישות ה-cubic spline לשינויים בנקודה אחת?

5. הוכח שלכל בחירה של c ו- d הפונקציה

$$z(x) = \begin{cases} (3x - 5x^2 + 2x^3)c + (-18x^2 + 11x + 7x^3)d & 0 \leq x \leq 1 \\ +13x + 7x^3 - 18x^2 & \\ (2 + x^2 - 3x)c + (6 - 7x + x^3)d & 1 \leq x \leq 2 \\ +7 - 8x + 3x^2 & \\ (-27x + 18 - 2x^3 + 13x^2)c + (102 - 11x^3 + 72x^2 - 151x)d & 2 \leq x \leq 3 \\ +79 - 116x + 57x^2 - 9x^3 & \end{cases}$$

היא cubic spline לנתונים

x_i	0	1	2	3
y_i	0	2	3	1

עבור איזה בחירה של c, d מקבלים ספליין טבעי ?

עבור איזה בחירה של c, d מתקיימים תנאי not-a-knot ?