בס"ד
כלים לאנליזה נומרית 83-214
תרגילים 3

1. (א) השתמש בשיטת ניוטון למצוא את 5 השורשים החיוביים הכי קטנים של המשוואה

$$\tan x = \frac{1}{x}\,.$$

למשוואה זו יש שורש קרוב ל-$n\pi$ עבור כל שלם חיובי $n$ גדול. העזר בסיבוב אחד של שיטת ניוטון למצוא קירוב למרחק בין השורש ובין $n\pi$.

(ב) השתמש בשיטת ניוטון למצוא את 5 השורשים החיוביים הכי קטנים של המשוואה

$$\tan x = x\,.$$

למשוואה זו יש שורש קרוב ל-$(n+\frac{1}{2})\pi$ עבור כל שלם חיובי $n$ גדול. העזר בסיבוב אחד של שיטת ניוטון למצוא קירוב למרחק בין השורש ובין $(n+\frac{1}{2})\pi$.

2. (א) מצא את רקורסיית ניוטון לפתרון המשוואה $x^3 - x = 0$ .

(ב) מה קורה אם מתחילים את הרקורסיה ב-$x_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ?

(ג) מה קורה אם מתחילים את הרקורסיה ב-$x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ?

(ד)הוכח שאם מתחילים את הרקורסיה ב-$x_0$ כאשר $|x_0| < \frac{1}{\sqrt{5}}$ אזי הרקורסיה מתכנסת לשורש $0$.

(ה) מצא את הקטע הכי גדול מסביב לשורש $1$ כך שאם מתחילים את הרקורסיה בקטע זה היא מתכנסת ל-$1$.

3. מצא את רקורסיית ניוטון לפתרון מערכת המשוואות

$$\begin{aligned} x^3 - 3xy^2 &= 1 \\ y^3 - 3yx^2 &= 0 \end{aligned}$$

בדוק את ההתכנסות הרקורסיה עבור בחירות שונות של נקודה התחלתית $(x_0, y_0)$ מפוזרות במישור $x, y$, ובמיוחד לנקודות התחלתיות על ציר ה-$x$ השלילי (מומלץ מאוד להעזר ב-Matlab !). מתי הרקורסיה מתכנסת, ולאיזה שורש ?

4. מצא, על ידי חיפוש יחס הזהב את המינימומים של הפונקציות הבאות על הקטע $[0,3]$. כל הפונקציות הן אונימודליות.

$$\begin{aligned} &x^4 - 14x^3 + 60x^2 - 70x \\ &\tfrac{1}{2}x^2 - \sin x \\ &x^2 + 4\cos x \end{aligned}$$

5. ידוע שיש לפונקציה הגזירה $f(x)$ מינימום בקטע $[a,b]$ ושהיא אונימודלית. מה יותר מהר, למצוא את המינימום על ידי חיפוש יחס הזהב, או על ידי חציית הקטעים עבור הנגזרת $f'(x)$ ? מה יותר מדוייק ? יש להתייחס גם למקרה שיש לנו נוסחה מפורשת לנגזרת $f'(x)$ וגם למקרה שצריך לחשב אותו על ידי קירוב, לדוגמה

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

כאשר $h$ קטן.

6. כתוב תוכנית ב-Matlab ליישם (א) את שיטת steepest descents ו-(ב) שיטת ניוטון למצוא את המינימום של הפונקצייה

$$f(x,y) = 100(y - x^2)^2 + (1-x)^2$$

(ברור שהמינימום נמצא ב-$x = y = 1$). בדוק את ההתכנסות השיטה עבור בחירות שונות של נקודה התחלתית $(x_0, y_0)$ מפוזרות במישור $x, y$. האם אתה יכול להסביר את האיטיות של steepest descents ?

7. מה היא שיטת הירידה הטלולה למציאת מינימום של פונקציה?

הוכח שאם מפעילים סיבוב אחד של שיטת הירידה הטלולה על הפונקציה

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2)$$

מקבלים את הרקורסיה

$$(x,y) \to \left( \frac{B^2(B-A)y^2}{A^3x^2 + B^3y^2} x, \frac{A^2(A-B)x^2}{A^3x^2 + B^3y^2} y \right)$$

הוכח מזה שאחרי שני סיבובים של השיטה היחס $x/y$ איננו משתנה, גם כי הוא כן משתנה אחרי סיבוב אחד.

מה הוא האנלוג של הרקורסיה שמקבלים כאשר מפעילים סיבוב אחד של השיטה לפונקציה

$$? \ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}(A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ldots A_n x_n^2)$$

8. (א) הסבר את חיפוש יחס הזהב למציאת מינימום של פונקציה של משתנה אחד. למה היא יעילה, ובכמה ניתן לקצר קטע שבו נמצא מינימום על ידי $n$ סיבובים של השיטה ? יש להדגים על ידי (לא פחות מ-3 סיבובים) לפונקציה

$$\frac{x(2+x)}{2 + \sin x}$$

שיש לו מינימום בין $x = -2$ ובין $x = 0$.

(ב) יודעים שהפונקציה $f(x)$ מתאפסת כאשר $x = 0$ וכאשר $x = 1$, ושהיא אונימודלית, בעלת מינימום יחיד, בין 0 ל-1. רוצים לצמצם את הקטע בו נמצא המינימום, ומותר לנו לחשב את הפונקציה $f(x)$ רק עבור שני ערכים של $x$. למה הכי טוב לחשב את $x$ בשתי נקודות קרובות ל- $x = \frac{1}{2}$ ? עם מותר ב-3 נקודות, למה הכי טוב ב- $x = \frac{1}{3}$ וב- $x = \frac{2}{3}$ ואח"כ עוד פעם קרוב או ל- $x = \frac{1}{3}$ או ל- $x = \frac{2}{3}$, תלוי באיזה מהם $f$ יותר נמוך ? מה היית עושה אם מותר לחשב את $f(x)$ 4 פעמים ?

9. (א) כתוב את רקורסית ניוטון לפתרון המשוואה $f(x) = 0$ כאשר $f(x) = \ln x - 1$. למה הרקורסיה לא תצליח למצוא את השורש $x = e$ אם מתחילים מ-$x_0$ כאשר $x_0 > e^2$ ? הפעל את הרקורסיה 6 פעמים החל מ- $x_0 = 7$.

(ב) כתוב את רקורסית ניוטון לפתרון המשוואה $f(x) = 0$ כאשר $f(x) = (\ln x - 1)^2$. למה הרקורסיה לא תצליח למצוא את השורש $x = e$ אם מתחילים מ-$x_0$ כאשר $x_0 > e^3$ ? הפעל את הרקורסיה 6 פעמים החל מ- $x_0 = 7$.

(ג) בתוצאות של סעיפים (א) ו-(ב), איזה משתי הרקורסית מגיעה יותר קרוב לשורש אחרי 3 סיבובים (החל מ- $x_0 = 7$)? ואיזה אחרי 6 סיבובים?

(ד) הסבר: שיטת ניוטון למשוואה $(f(x))^2 = 0$ אולי תצליח להגיע קרוב לשורש יותר מהר משיטת ניוטון למשוואה $f(x) = 0$, אבל בסוף שיטת ניוטון למשוואה $f(x) = 0$ תמיד תגיע יותר מהר לדיוק גבוה.