בס"ד

גאומטריה דפרנציאלית, 88-862 — ד"ר ג'רמי שיף

מועד א', סמסטר א', תשנ"ט

זמן המבחן: שעתיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר.
עליך לענות על שתי השאלות. ניקוד שתי השאלות שווה.

1. אם M יריעה גזירה עם מטריקה רימנית $\langle\ ,\ \rangle^M$ ו-N יריעה גזירה עם מטריקה רימנית $\langle\ ,\ \rangle^N$, אומרים שדיפיומורפיזם $f : M \to N$ מכבד את המטריקות אם לכל שתי שדות ווקטוריים X, Y ב-M

$$\langle X, Y\rangle^M = \langle f_*X, f_*Y\rangle^N$$

באותו אופן, אם M יריעה גזירה עם connection ∇^M, ו-N יריעה גזירה עם connection ∇^N, אומרים שדיפיומורפיזם $f : M \to N$ מכבד את ה-connections אם לכל שתי שדות ווקטוריים X, Y ב-M

$$f_*\nabla^M_X Y = \nabla^N_{f_*X} f_*Y$$

נתונות שתי יריעות גזירות M, N עם מטריקות רימניות ודפיומורפיזם $f : M \to N$ שמכבד את המטריקות. הוכח שאם נותנים ל-M, N את ה-Levi-Civita connections של המטריקות שלהם, אזי f גם מכבד את ה-connections.

2. בחצי הימין $x > 0$ של מישור ה-(x, y) ניתן להגדיר קואורדינטות חדשות (θ, ϕ) על ידי

$$\tan\theta = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\tan\phi = \frac{y}{x} \qquad -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$$

א. מה היא הצורה של המטריקה הרימנית $dx \otimes dx + dy \otimes dy$ בקואורדינטות θ, ϕ ?
ב. חשב את הרכיבים של ה-Levi-Civita conection (סימני Christoffel) בקואורדינטות θ, ϕ.
ג. מצא את הרכיבים של טנזור העקמומיות של רימן בקואורדינטות θ, ϕ.