בס"ד

ד"ר גרמי שיף

גיומטריה דפרנציאלית, 88-826-01
מבחן מועד ב, סמסטר א, תשנ"ו

זמן המבחן: שעתיים
מותר להשתמש בכל חומר עזר
ניקוד כל השאלות שווה

1. א. הראה איך לתת ל- S^3 מבנה של יריעה גזירה, כאשר

$$S^3 = \{(w,x,y,z) \in \mathbf{R}^4 \ \mid \ w^2+x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

ב. הוכח ש-"פונקצית הגובה" $f : S^3 \to \mathbf{R}$, המוגדרת על ידי

$$f(w,x,y,z) = z$$

היא גזירה.

2. נקודה ב- $S^1 \times S^1$ ניתנת על ידי זוג זויות (θ, ϕ). "העתקת גאוס" $f : S^1 \times S^1 \to S^2$ מוגדרת על ידי

$$f(\theta,\phi) = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta)$$

א. הוכח ש- f היא גזירה.
ב. הוכח ש- f היא אמרסיה (immersion) בכל נקודה.

3. בחצי המישור $\{(x,y)|x>0\}$ ניתנה המטריקה

$$dx \otimes dx + x^2 dy \otimes dy$$

מצא את האורך של הישרים:
א. בין (A,B) ו- $(A,-B)$
ב. בין (A,B) ו- $(C,0)$
ג. בין $(A,-B)$ ו- $(C,0)$ (כאן $A,B,C>0$).
האם תמיד נכון שהאורך של הישר בין (A,B) ו- $(C,0)$ פלוס האורך של הישר בין $(C,0)$ ו- $(A,-B)$ גדול מהאורך של הישר בין (A,B) ו- $(A,-B)$?

בהצלחה!!