בס"ד

ד"ר.גרמי שיף

גיומטריה דפרנציאלית ,88-826-01
מבחן מועד א, סמסטר א, תשנ"ו

זמן המבחן: שעתיים
מותר להשתמש בכל חומר עזר
ניקוד כל השאלות שווה

1. $SL(2)$ היא הקבוצה של מטריצות 2×2 עם דטרמיננט 1, זאת אומרת

$$SL(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1 \right\}$$

א. U_1, U_2 מוגדרות על ידי

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2) \mid a \neq 0 \right\}$$

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2) \mid b \neq 0 \right\}$$

ו- $\phi_1 : U_1 \to \mathbf{R}^3$, $\phi_2 : U_2 \to \mathbf{R}^3$ מוגדרות על ידי

$$\phi_1 \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = (a, b, c)$$

$$\phi_2 \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = (a, b, d)$$

הוכח שמערכות הקואורדינטות (U_1, ϕ_1) , (U_2, ϕ_2) נותנות ל- $SL(2)$ את המבנה של יריעה גזירה.

ב. לאטלס הגזירה שניתן על ידי (U_1, ϕ_1) , (U_2, ϕ_2) , הוכח שאפשר להוסיף (U_3, ϕ_3) , כאשר

$$U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2) \mid c \neq 0 \right\}$$

ו- $\phi_3 : U_3 \to \mathbf{R}^3$ מוגדרת על ידי

$$\phi_3 \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = (a, c, d)$$

2. הפונקציה $f : S^1 \to \mathbf{R}^2$ מוגדרת על ידי

$$f(\theta) = (\cos(m\theta + \alpha), \cos(n\theta + \beta))$$

כאשר m, n הם שלמים, α, β הם ממשיים, ו- θ היא הזוית הסטנדרטית המתארת נקודה ב- S^1.

א. הוכח ש- f היא גזירה (יש לתת הסבר מלא!)

ב. הוכח שאם $(n\alpha - m\beta)/\pi$ איננו שלם, אזי f היא אמרסיה (immersion) בכל נקודה.

3. בחצי המישור $\{(x, y)|y > 1\}$ ניתנה המטריקה

$$\left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-1} dx \otimes dx + \left(1 - \frac{1}{y}\right) dy \otimes dy$$

א. מצא את האורך של ישר בין $(0, A)$ ו- $(0, B)$, כאשר $B > A > 1$. (רמז:

$$\left(\int \sqrt{\frac{y-1}{y}} dy = \sqrt{y(y-1)} - \ln(\sqrt{y} + \sqrt{y-1}) \right)$$

ב. מצא את האורך של ישר בין $(0, B)$ ו- (C, B), כאשר $B > 1$, $C > 0$.

ג. אם $A > 1$ אבל $A - 1$ מספיק קטן, ו- $C > 0$, האם הדרך הכי קצר בין $(0, A)$ ו- (C, A) הוא ישר?

בהצלחה!!