בס"ד

ד"ר.גרמי שיף

גיומטריה דפרנציאלית 88-526/826,
תרגיל 2

1. אם $f : M \to \mathbf{R}$ היא העתקה גזירה, ו-x היא מערכת קואורדינטות לסביבה של $p \in M$, המטריצה של נגזרות שניות של f ב-p ביחס לקואורדינטות x מוגדרת על ידי

$$M_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x^i \partial x^j}(p) = D_i D_j (f \circ x^{-1})\,(x(p))$$

   א. אם y היא מערכת קואורדינטות אחרת לסביבה של p, מצא נוסחא שמקשרת בין המטריצה של נגזרות שניות של f ב-p ביחס ל-x והמטריצה של נגזרות שניות של f ב-p ביחס ל-y.
   ב. הוכח שאם p היא נקודה כך ש-$\mathrm{rank}_p(f) = 0$, אזי מספר הערכים העצמיים החיוביים של M (וגם מספר הערכים העצמיים השליליים של M) לא תלוי בבחירת הקואורדינטות x. (יש להשתמש בזה ש-M היא מטריצה סמטרית.)

2. הפונקציה $f : \mathbf{R}P^2 \to \mathbf{R}^3$ מוגדרת על ידי

$$f(\{(\lambda x, \lambda y, \lambda z), \lambda \in \mathbf{R}\}) = \frac{(yz, zx, xy)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

   א. הוכח ש-f היא גזירה. (השתמש במבנה הגזירה הסטנדרטי עבור $\mathbf{R}P^2$, עם שלושה הטלאיים $\{x \neq 0\}, \{y \neq 0\}, \{z \neq 0\}$.)
   ב. הוכח ש-f היא אמרסיה (immersion) חוץ מב-6 נקודות.

3. בשאלה זאת, יש להתייחס למרחב M_n של מטריצות ממשיות $n \times n$, כמרחב וקטורי נורמי, עם הנורמה $||H|| = \sqrt{\mathrm{Tr}(H^T H)}$, $H \in M_n$.
   א. מצא את הנגזרת של הפונקצייה $f : M_n \to M_n$ המוגדרת על ידי $f(X) = X^3$ (לפי מה שלמדנו בשיעור, הנגזרת $f'(X)$ היא העתקה ליניארית מ-M_n ל-M_n.)
   ב. על ידי ההעתקה הטבעית $A \mapsto \mathrm{Tr}(AX)$ יש איזומורפיזם קנוני בין M_n ו-$M_n^\star$. הנגזרת $f'(X)$ של פונקציה $f : M_n \to \mathbf{R}$ היא העתקה ליניארית מ-M_n ל-$\mathbf{R}$, זאת אומרת היא אלמנט של $M_n^\star$, ולכן דרך האיזומורפיזם הקנוני היא אלמנט של M_n. מצא, כאלמנטים של M_n, את הנגזרות של (1) $f(X) = \mathrm{Tr}(X)$, ו-(2) $f(X) = \det(X)$.