בס"ד

גיומטריה דפרנציאלית, 88-526/826 ד"ר.גרמי שיף

מבחן מועד א, תשנ"ז

זמן המבחן: שעתיים

מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס

ניקוד כל השאלות שווה

פתרונות נכונים ומנומקים היטב לשלוש שאלות מספיקים לציון 100% במבחן

1. לעקומה

$$\alpha(s) = \left(-\tfrac{1}{4}\cos 2s, \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{4}\sin 2s, \sin s\right)$$

א. הוכח שהפרמטר s הוא אורך ארק.

ב. מצא את העיקום ואת העיקול.

2. א. הוכח ש-

$$\vec{x}(u,v) = (\mathrm{sech}u\cos v, \mathrm{sech}u\sin v, \tanh u)$$

הוא פרמטריזציה של הספרה S^2 (כאן $-\infty < u < \infty,\ 0 < v < 2\pi$).

ב. מה הוא היחס בין הקואורדינטות (u,v) והקואורדינטות הסטנדרטיות (θ,ϕ) ?

ג. מצא את המקדמים של התבנית היסודית הראשונה בקואורדינטות (u,v), והשתמש בהם למצוא את השטח של הספרה.

3. עבור הפרבולויד האליפטי P_E והפרבולויד ההיפרבולי P_H שניתנים על ידי הגרפים

$$P_E: \qquad z = \tfrac{1}{2}(x^2+y^2)$$
$$P_H: \qquad z = \tfrac{1}{2}(x^2-y^2)$$

א. חשב את התבנית היסודית השנייה.

ב. איזה נקודות הן אליפטיות ואיזה היפרבוליות ?

ג. מצא את העיקום הנורמלי של כל עקומה במשטח בנקודת הראשית $(0,0,0)$, והסבר מבחינה גיומטרית.

4 א. על ידי שימוש בתוצאות של תרגיל 3, שאלה 3, או אחרת, הוכח שעיקום הגאוס של הגרף

$$\vec{x} = (x, y, g(x, y))$$

הוא

$$\frac{g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2}{(1 + g_x^2 + g_y^2)^2} \, .$$

ב. על ידי משפט גאוס, הוכח שאם למשטח יש קואורדינטות (u, v) כך שהמקדמים של התבנית היסודית הראשונה הם

$$E = G = 1, \quad F = \cos\theta(u, v) \, ,$$

אזי עיקום הגאוס הוא

$$\frac{-\theta_{uv}}{\sin\theta} \, .$$

בהצלחה!