בס"ד

ד"ר.גרמי שיף

גיומטריה דפרנציאלית, 88-526/826

תרגיל 3

1. לקונוס עם זוית α יש פרמטריזציה

$$\vec{x} = (z\tan\alpha\cos\theta, z\tan\alpha\sin\theta, z)$$
$$0 < \theta < 2\pi, \qquad 0 < z < 1.$$

(כאן α הוא פרמטר עם $0 < \alpha < \pi/2$.)

מצא את שטח הקונוס, ואת אורך הספיראל על העקומה שניתן על ידי

$$\begin{matrix} \theta = 4\pi t \\ z = 1 - t \end{matrix} \qquad 0 < t < 1.$$

2. משטח נקרא "משטח הנוצר על ידי סיבוב" עם החיתוך של המשטח עם כל מישור $z = a$ הוא מעגל עם ראשית ב- $(x, y) = (0, 0)$. למשטח הנוצר על ידי סיבוב יש פרמטרציה

$$\vec{x} = (f(z)\cos\theta, f(z)\sin\theta, z)$$
$$0 < \theta < 2\pi$$

כאשר $f(z)$ היא פונקציה גזירה עם $f(z) > 0$.

עם התחום של z הוא $-1 < z < 1$, מצא נוסחה לשטח של המשטח.

עבור שלוש הבחירות הבאות של $f(z)$, $f(\pm 1) = 1$, ולכן המשטח הוא משטח המחבר בין המעגל $x^2 + y^2 = 1$ במישור $z = -1$ ובין אותו מעגל במישור $z = +1$. מצא את שטח המשטח בכל מקרה:

$$f(z) = 1$$
$$f(z) = 1 - \alpha(1 - z^2) \qquad 0 < \alpha < 1$$
$$f(z) = \frac{\cosh \alpha z}{\cosh \alpha} \qquad 0 < \alpha$$

3. חשב את המקדמים של התבניות היסודיות הראשונה והשנייה
   א. עבור משטח שניתן כגרף:

$$\vec{x} = (x, y, g(x, y))$$

   ($g(x,y)$ פונקצייה גזירה).
   ב. עבור משטח שנוצר על ידי סיבוב:

$$\vec{x} = (f(z)\cos\theta, f(z)\sin\theta, z)$$

   ($f(z)$ פונקצייה גזירה).

4. עבור הפרבולויד האליפטי P_E והפרבולויד ההיפרבולי P_H שניתנים על ידי הגרפים

$$P_E: \qquad z = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$$
$$P_H: \qquad z = \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

   א. חשב את התבנית היסודית השנייה.
   ב. איזה נקודות הן אליפטיות ואיזה היפרבוליות ?
   ג. מצא את העיקום הנורמלי של כל עקומה במשטח בנקודת הראשית $(0,0,0)$, והסבר מבחינה גיומטרית.

5. עם העקומה C הוא החיתוך של שני המשטחים S_1, S_2 , והעיקום הנורמלי בנקודה p של C כעקומה על S_1 (S_2) הוא κ_1 (κ_2), הוכח שהעיקום κ של C ב- p ניתן על ידי

$$\kappa^2 \sin^2\alpha = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 2\kappa_1\kappa_2\cos\alpha$$

   כאשר α היא הזוית בין הנורמלים ל- S_1 ו- S_2 בנקודה p.