בס"ד

שיטות נומריות, 376-88 — ד"ר ג'רמי שיף

מבחן מועד ב', סמסטר א' תש"ס

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס מדעי (אבל לא מחשב נייד).
יש לענות על כל 3 השאלות בחלק א' ועל 3 מתוך 4 השאלות בחלק ב'.
ניקוד השאלות: בחלק א' 8 נקודות לכל שאלה, בחלק ב' 17 נקודות לכל שאלה
(סה"כ הניקוד: $76 = 1 + 17 \times 3 + 8 \times 3$ (בונוס אוטומטי).
יש לנמק היטב כל תשובה!

חלק א'

1. מצא את הישר $y = ax + b$ שהוא הקירוב הטוב ביותר (במובן של ריבועים מזעריים) לנתונים הבאים:

x_n	0	2	3	4
y_n	0.3	1.4	1.8	2.4

2. מצא את הישר $p(x) = ax + b$ שהוא הקירוב הטוב ביותר לפונקציה $f(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2$ בקטע $[-1, 1]$, במובן ש

$$\int_{-1}^{1} (p(x) - f(x))^2 \, dx$$

הוא מינימלי.

3. מצא קירוב לאינטגרל

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{4 + x^2}\right) dx$$

על ידי ה-trapezium rule עם (א) 2 ו-(ב) 4 צעדים. איך ניתן לצרף את שתי התוצאות האלה לקבלת תוצאה טובה יותר?

חלק ב'

4. א. מה הוא המספר הטבעי הקטן ביותר n כך ש- $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ הוא יותר קטן מכל מספר נורמלי חיובי בתקן של double precision של ה-IEEE ?
   ב. מה הוא המספר הטבעי הקטן ביותר n כך ש- $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ הוא יותר קרוב ל-0 מכל מספר אחר בתקן של double precision של ה-IEEE ?
   ג. מה הוא המספר בעל נקודה צפה (בתקן float של ה- IEEE) שהוא הקרוב ביותר ל-$\frac{4}{5}$?
   ד. אם x היא התשובה שלך בסעיף ג, מה הוא המספר בעל נקודה צפה (float) הקרוב ביותר ל-x^2 ?

5. יהא $p(x)$ פולינום הבין (מדרגה לא יותר מ-2) העובר דרך 3 הנקודות הנתונות (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) $(x_0 \neq x_1 \neq x_2 \neq x_0)$. חשב את $\int_{x_0}^{x_2} p(x)dx$. הסבר את הקשר בין התשובה שמצאת וכלל סמפסון.

6. מצא את הפרבולה $p(x) = ax^2 + bx + c$ שהיא הקירוב הטוב ביותר ל- $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ בקטע $[-1, 1]$, במובן ש

$$S = \int_{-1}^{1} (p(x) - f(x))^2 \, dx$$

הוא מינימלי. בכמה נקודות $p(x) = f(x)$? באופן כללי, כאשר בונים קירוב פולינומי $p(x)$ לפונקציה נתונה $f(x)$ (במובן של מינימיזציה של S), האם ניתן לומר שתמיד יהיו נקודות שבהם $p(x) = f(x)$? נמק.

7. מצא קירובים ל $\int_{-1}^{1} \cos x \, dx$ על ידי Gaussian Integration עם 2, 4 ו-6 קודקודים. מה ניתן להגיד על התנהגות הטעות?

בהצלחה!!