חישוב אנטגרלים

הבעייה: למצוא קירוב ל-

$$\int_a^b f(x)dx$$

כאשר f היא פונקציה נתונה ו-$[a,b]$ קטע סופי נתון.

1) כלל הטרפז The Trapezium Rule

2) כלל סמפסון Simpson's Rule

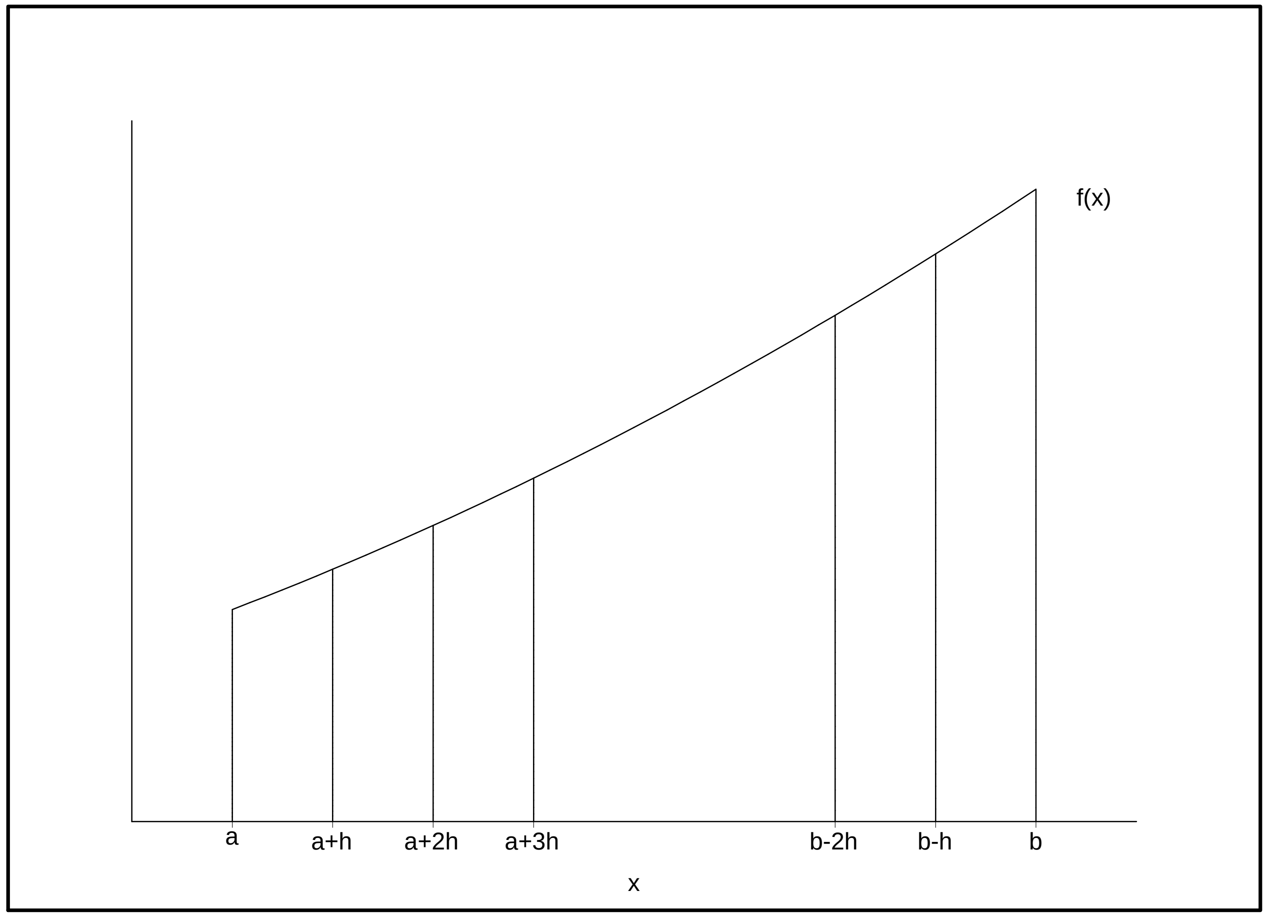
3) חיוץ רומברג Romberg Extrapolation

4) תרבוע גאוס Gaussian Quadrature

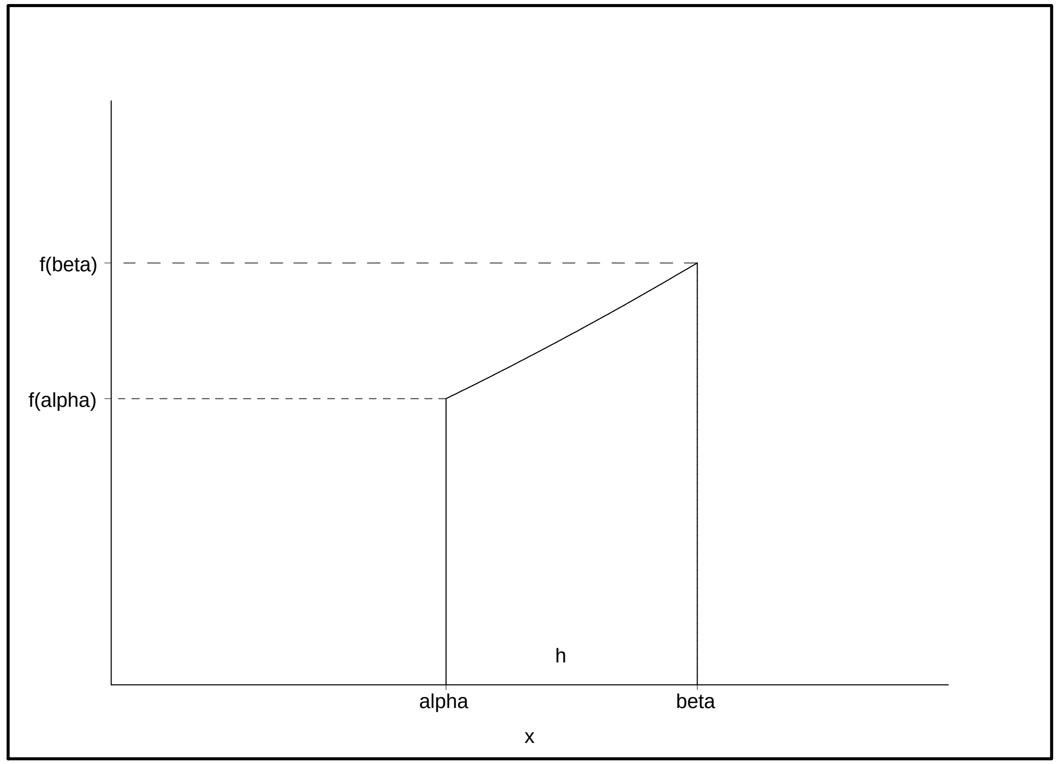
5) Matlab/Scilab

כלל הטרפז The Trapezium Rule

מחלקים את הקטע ל-n תת-קטעים בעלי אורך $h = \frac{b-a}{n}$.



בכל קטע קטן ניתן לעשות קירוב לשטח תחת הגרף כאילו f לינארי בקטע:



$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(\alpha) + f(\beta)\right)$$

ולכן

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{2}\Big(f(a)+f(a+h)\Big)+\frac{h}{2}\Big(f(a+h)+f(a+2h)\Big)\\ &+\frac{h}{2}\Big(f(a+2h)+f(a+3h)\Big)+\ldots+\frac{h}{2}\Big(f(b-h)+f(b)\Big)\\ &= \frac{h}{2}\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(a+ih)+f(b)\right)\end{aligned}$$

זה כלל הטרפז: $\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(a+ih)+f(b)\right)}$

הטעות בכלל הטרפז: נניח $f(x)$ גזירה פעמיים על הקטע.

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta 1\cdot f(x)dx &= \left[\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)f(x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)f'(x)dx \\
&= \frac{h}{2}\Big(f(\beta)+f(\alpha)\Big) - \left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 f'(x)\right]_\alpha^\beta \\
&\qquad + \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 f''(x)dx \\
&= \frac{h}{2}\Big(f(\beta)+f(\alpha)\Big) - \frac{h^2}{8}\Big(f'(\beta)-f'(\alpha)\Big) \\
&\quad + \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 f''(x)dx \\
&= \frac{h}{2}\Big(f(\beta)+f(\alpha)\Big) \\
&\quad - \int_\alpha^\beta \left(\frac{h^2}{8}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right) f''(x)dx
\end{aligned}$$

הפונקציה שמכפילה את $f''(x)$ באינטגרל האחרון הוא חיובי, ולכן

$$\begin{aligned}\left|\int_\alpha^\beta \left(\frac{h^2}{8}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right)f''(x)dx\right| &\le M\int_\alpha^\beta \left(\frac{h^2}{8}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right)dx\\ &= M\frac{h^3}{12}, \qquad M=\sup|f''(x)|\end{aligned}$$

ולכן

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\frac{h}{2}\left(f(\alpha)+f(\beta)\right)+I\ , \qquad |I|\le\frac{Mh^3}{12}$$

עושים סכום על כל הקטעים ומקבלים

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{2}\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(a+ih)+f(b)\right)+\mathcal{I}\ ,$$

$$|\mathcal{I}|\le n\frac{Mh^3}{12}=\frac{Mh^2(b-a)}{12}$$

הטעות אכן מתנהגת כ-h^2, כלומר יורדת כמו $\frac{1}{n^2}$ (זה בתנאי ש-f גזירה פעמיים).

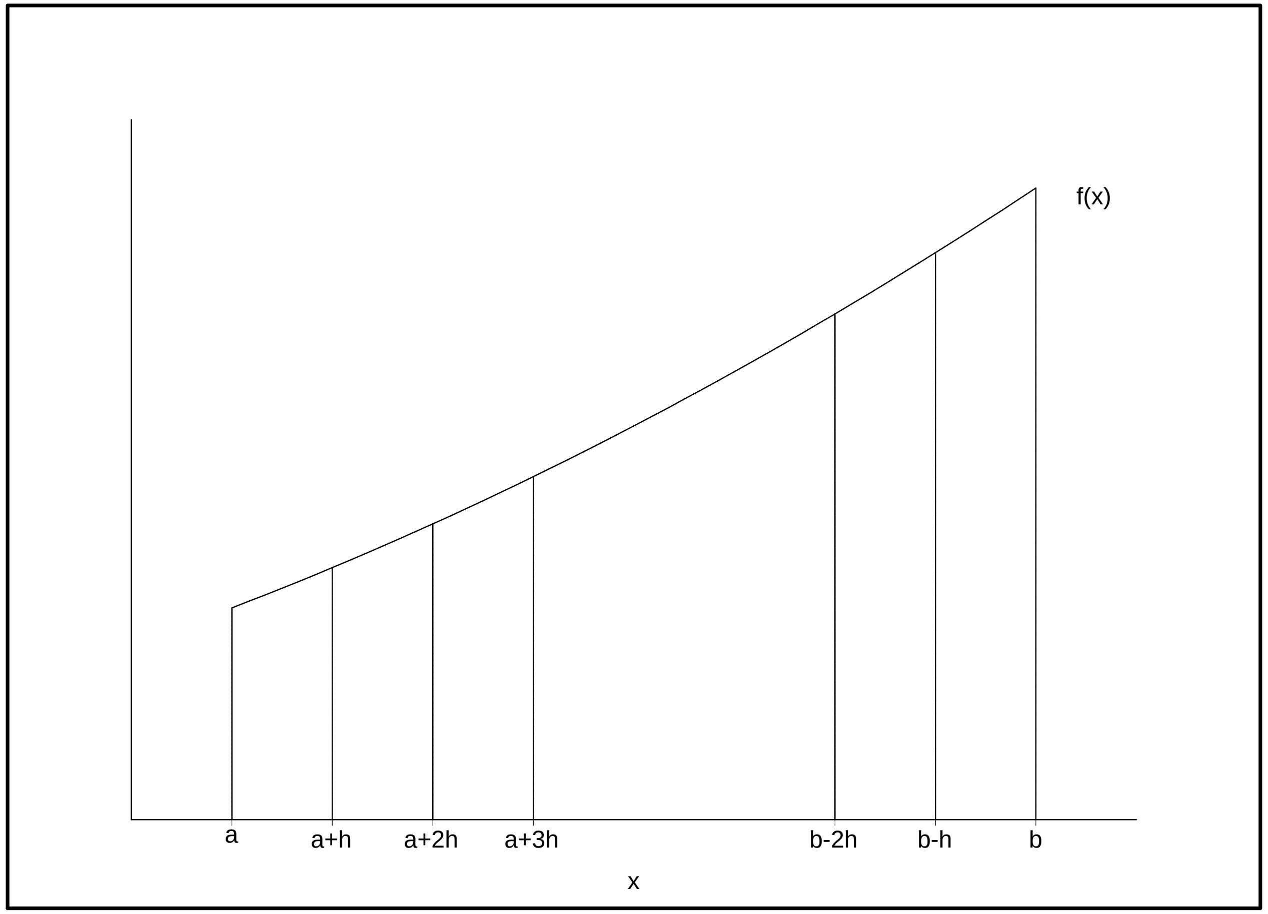
אם מכפילים את מספר התת-קטעים על ידי 2, מורידים את הטעות על ידי 4 (בערך).

דוגמה: קירובים ל-$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$ (ערך מדויק 1):

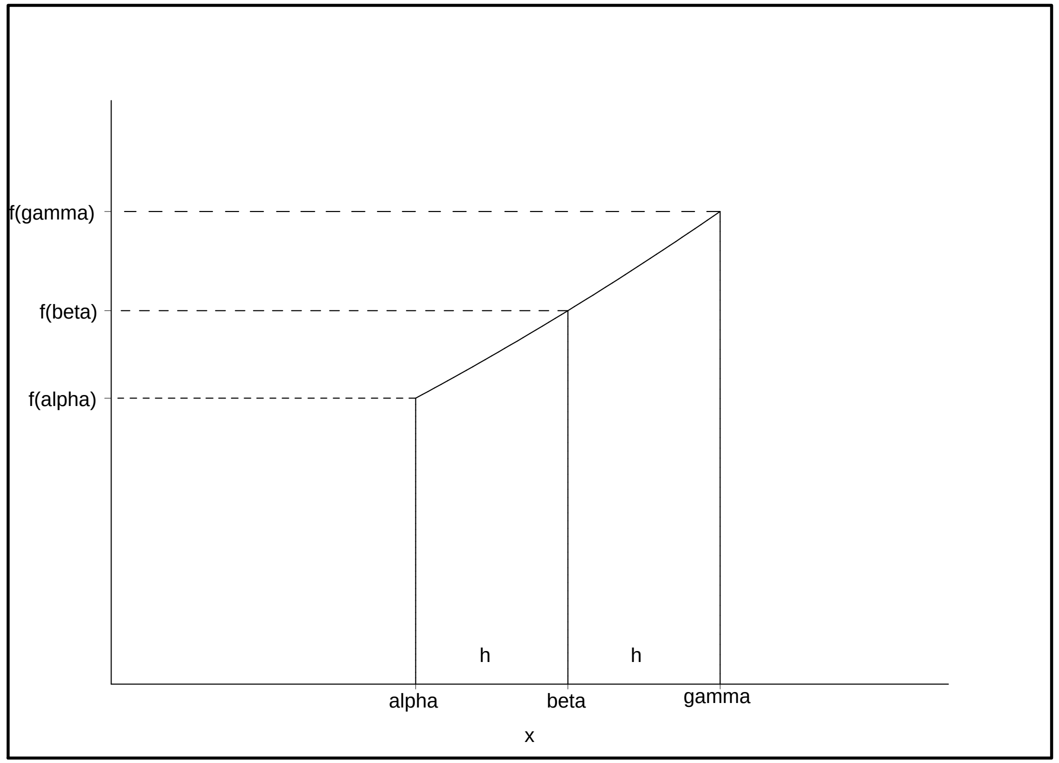
n	קירוב	טעות
4	0.987116	0.012884
8	0.996785	0.003215
16	0.999197	0.000803
32	0.999799	0.000201

כלל סמפסון Simpson's Rule

מחלקים את הקטע ל-n תת-קטעים בעלי אורך $h = \frac{b-a}{n}$, כאשר n זוגי.



בכל זוג של קטעים קטנים עושים קירוב ל-f ע"י פרבולה:



$$f(x) \approx f(\alpha)\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + f(\beta)\frac{(x-\alpha)(x-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + f(\gamma)\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

מזה ניתן לחשב קירוב לאנטגרל:

$$\int_\alpha^\gamma f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(\alpha)+4f(\beta)+f(\gamma)\right)$$

עושים סכום על כל הזוגות של קטעים, ומקבלים כלל סמפסון:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx \;\approx\; & \frac{h}{3}\Big(f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+4f(a+3h)+\dots \\ & +4f(b-3h)+2f(b-2h)+4f(b-h)+f(b)\Big)\end{aligned}$$

דוגמה: קירובים ל-$\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx$ (ערך מדויק 1):

n	קירוב	טעות
4	1.00013458	0.00013458
8	1.00000830	0.00000830
16	1.00000052	0.00000052

הטעות מתנהגת כ-h^4, יורדת כ-$\frac{1}{n^4}$, בתנאי ש-f גזירה 4 פעמים. חסם על הטעות $\frac{Mh^4(b-a)}{180}$ כאשר $M=\sup|f''''(x)|$.

חיוץ רומברג Romberg Extrapolation

נסמן

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

נסמן על ידי $I_n^{(1)}$ את הקירוב ל-I על ידי כלל הטרפז עם n "צעדים"

כבר אמרנו כבר שאם הטעות בקירוב $I_n^{(1)}$ הוא ϵ, כלומר

$$I_n^{(1)} = I + \epsilon$$

אזי הטעות בקירוב $I_{2n}^{(1)}$ הוא בערך $\epsilon/4$, כלומר

$$I_{2n}^{(1)} \approx I + \frac{\epsilon}{4}$$

ולכן

$$I \approx \frac{4I_{2n}^{(1)} - I_n^{(1)}}{3}$$

נכתוב

$$I_{2n}^{(2)} = \frac{4I_{2n}^{(1)} - I_n^{(1)}}{3}$$

לפי מה שהסברנו למעלה, אנחנו מצפים שהטעות ב-$I_{2n}^{(2)}$ כקירוב ל-I תהיה קטנה מהטעות בקירוב $I_{2n}^{(1)}$. ניתן להוכיח שהטעות ב-$I_{2n}^{(2)}$ מתנהגת כ-$\frac{1}{n^4}$. ולכן אם

$$I_{2n}^{(2)} = I + \epsilon$$

אזי

$$I_{4n}^{(2)} \approx I + \frac{\epsilon}{16}$$

ולכן מוצדק לבנות "סוג שלישי" של קיורב על ידי

$$I_{4n}^{(3)} = \frac{16I_{4n}^{(2)} - I_{2n}^{(2)}}{15}$$

הטעות בקירובים אלה מתנהגת כ-$\frac{1}{n^6}$.

שיטת רומברג: מחשבים את התוצאות של כלל הטרפז עם $n, 2n, 4n, 8n, \ldots$ צעדים. בונים את טבלת החיוץ

$I_n^{(1)}$			
$I_{2n}^{(1)}$	$I_{2n}^{(2)} = \frac{4I_{2n}^{(1)} - I_n^{(1)}}{3}$		
$I_{4n}^{(1)}$	$I_{4n}^{(2)} = \frac{4I_{4n}^{(1)} - I_{2n}^{(1)}}{3}$	$I_{4n}^{(3)} = \frac{16I_{4n}^{(2)} - I_{2n}^{(2)}}{15}$	
$I_{8n}^{(1)}$	$I_{8n}^{(2)} = \frac{4I_{8n}^{(1)} - I_{4n}^{(1)}}{3}$	$I_{8n}^{(3)} = \frac{16I_{8n}^{(2)} - I_{4n}^{(2)}}{15}$	$I_{8n}^{(4)} = \frac{64I_{8n}^{(3)} - I_{4n}^{(3)}}{63}$

הדוגמה: $I = \int_0^{\pi/2} \sin x \; dx$

	תוצאות טרפז: $I^{(1)}$	$I^{(2)}$	$I^{(3)}$	$I^{(4)}$
$n = 4$	0.9871158009727756			
$2n = 8$	0.9967851718861697	1.000008295523968		
$4n = 16$	0.9991966804850723	1.000000516684706	0.9999999980954221	
$8n = 32$	0.9997991943200188	1.000000032265001	0.9999999999703543	1.000000000000116

$I^{(4)}$
1.00000000000016

הערות:

1) כאשר f מסובכת, כמעט ואין עבודה נוספת לעבור מ- $I_{8n}^{(1)}$ ל- $I_{8n}^{(4)}$.

2) $I_n^{(2)}$ הוא כלל סמפסון עם n צעדים.

3) כל זה תלוי על הגזירות של f לסדר מספיק גבוה.

תרבוע גאוס Gaussian Quadrature

עד כאן כל השיטות שראינו הן מהצורה

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(a+ih)$$

כאשר לטרפז המשקלות w_i הם $\frac{h}{2}, h, h, \ldots, h, h, \frac{h}{2}$,
לסמפסון הם $\frac{h}{3}, \frac{4h}{3}, \frac{2h}{3}, \frac{4h}{3}, \ldots, \frac{4h}{3}, \frac{2h}{3}, \frac{4h}{3}, \frac{h}{3}$ וכו'.

הכללה פשוטה: נחפש את "משקלות" w_i ו"קודקודים" $x_i \in [a,b]$ כך ש"נוסחת התרבוע"

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

נותנת קירוב טוב. מהו קירוב טוב? אחד הקריטריונים האפשריים: שזה עובד טוב לפולינומים $f(x)$ מדרגה נמוכה. היות ויש $2n$ דרגות חופש w_i, x_i, ניתן (אולי) לדרוש שהקירוב יהיה מדויק כאשר $f(x)$ פולינום מדרגה עד $2n-1$.

תרבוע גאוס: $[a,b]$ קטע נתון, $w(x) \geq 0$ פונקציית משקל על הקטע. n שלם חיובי.

ניתן לבחור את הקודקודים x_i ואת המשקלות w_i כך שנוסחת התרבוע

$$\int_a^b w(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

הוא מדוייק לכל פולינום $f(x)$ מדרגה עד $2n-1$.

בוחרים:

1) x_i להיות השורשים של $p_n(x)$, כאשר $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \ldots$ הם פולינומים אורתו-גונליים על הקטע $[a,b]$ ביחס למשקל $w(x)$.

2) $w_i = \int_a^b w(x)L_i(x)dx$ כאשר $L_i(x)$ היא פונקציה ראשית של לגרנג', כלומר

$$L_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

בפועל, משתמשים בטבלאות מוכנות של x_i, w_i לבחירות הסטנדרטיות של $[a,b]$ (כלומר: $[-1,1]$, $[0,\infty)$, $(-\infty,\infty)$), ולבחירות הסטנדרטיות של $w(x)$.

עיין באתר הקורס למקרה $[a,b]=[-1,1]$ ו-$w(x)=1$ (הפולינומים האורתוגונליים הם פולינומי לז'נדר).

במקרה $[a,b]=[-1,1]$, $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, הפולינומים הם פולינומי צ'ביצ'ב, והקודקוד-ים הם "נקודות צ'ביצ'ב"

$$x_i = \cos\left(\frac{(i+\frac{1}{2})\pi}{n}\right) \;, \qquad i=0,1,\ldots,n-1$$

תרבוע גאוס נותן טעויות נמוכות ביותר.

Matlab/Scilab

Matlab 5: דיוק נמוך quad, דיוק גבוה quad8

Matlab 6: דיוק נמוך quad, דיוק גבוה quadl. השימוש ב-quad שונה מבגירסה 5.

Scilab: intg או integrate

עיין בקובצי ה- help באתר הקורס