בס"ד

שיטות נומריות, 88-376   ד"ר ג'רמי שיף

תרגילים: קירוב עקומות

1. מצא את הקו $y = ax+b$ שהוא הקירוב הכי טוב (במובן של ריבועים זעירים) לנתונים הבאים:

x_n	1	2	3	4	5	6	7
y_n	1.1	2.3	4.9	6.2	7.2	8.6	9.5

2. (למתעניינים בלבד!) בשאלה זאת נתונות 8 נקודות (x_n, y_n), $n = 1, 2, \ldots, 8$, לפי הטבלה למטה, ודרוש למצוא פולינום ריבועי $p(x)$ כך ש- $p(x_n) \approx y_n$, $n = 1, 2, \ldots, 8$.

x_n	1	2	3	4	5	6	7	8
y_n	0.5	-0.3	-1.2	-0.9	0.2	2.4	4.0	7.5

בסעיפים א. ו-ב. מוצעות שתי שיטות לעשות את זה, אבל רק השניה מוצלחת.

א. שיטה ישירה. אם $p(x) = ax^2 + bx + c$ אזי הדרך ההגיוני לבחור a, b, c הוא כך שסכום השאריות

$$S = \sum_{n=1}^{8} (y_n - p(x_n))^2$$

מקבל ערך מינימלי. הראה שמהתנאים

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial S}{\partial b} = \frac{\partial S}{\partial c} = 0$$

ניתן לקבל שלוש משוואות ליניאריות שמהם ניתן למצוא a, b, c, אבל המערכת הלינ-יארית הזאת היא ill conditioned.

ב. שיטת פולינומים אורתוגונליים. כשלב הכנה, מצא שלושה פולינומים $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ כך ש $p_i(x)$ היא מדרגה i, $i = 0, 1, 2$ וכך ש-

$$\sum_{n=1}^{8} p_0(x_n)p_1(x_n) = \sum_{n=1}^{8} p_0(x_n)p_2(x_n) = \sum_{n=1}^{8} p_1(x_n)p_2(x_n) = 0$$

עכשיו, כתוב $p(x) = a_2p_2(x) + a_1p_1(x) + a_0p_0(x)$, ומצא את המקדמים a_0, a_1, a_2 משלושת התנאים

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \frac{\partial S}{\partial a_1} = \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0$$

מה הם הערכים של $p(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots, 8$?

3. מצא את הפולינום $p(x)$ מדרגה 4 שהוא הקירוב הכי טוב לפונקציה $e^x \sin x$ על הקטע $[-1,1]$, במובן שסכום השאריות

$$\int_{-1}^{1} (p(x) - e^x \sin x)^2 \ dx$$

הוא כמה שאפשר יותר קטן.

4. א. מצא פולינום ריבועי $p(x)$ שהוא הקירוב שכי טוב לפונקציה $f(x) = (1-|x|)/(1+x^2)$ על הקטע $[-1,1]$, במובן שסכום השאריות

$$\int_{-1}^{1} (p(x) - f(x))^2 \ dx$$

הוא כמה שאפשר יותר קטן.

ב. מצא פולינום ריבועי $p(x)$ שהוא הקירוב שכי טוב לפונקציה $f(x) = (1-|x|)/(1+x^2)$ על הקטע $[-1,1]$, במובן שסכום השאריות

$$\int_{-1}^{1} \frac{(p(x) - f(x))^2}{\sqrt{1-x^2}} \ dx$$

הוא כמה שאפשר יותר קטן.

5. א. מצא את הקירוב הכי טוב לפונקציה $\sin(\pi x/2)$ על הקטע $[-1,1]$ על ידי פולינומים מדרגות $1,3,5$. יש להשתמש בריבועים זעירים עם פונקצית משקל $w(x) = 1$. באיזה דרגה של פולינום צריך להתשתמש כדי לקבל טעות מקסימלית קטנה מ-10^{-6}?

ב. מצא את הקירוב הכי טוב לפונקציה $\sin(\pi x/2)$ על הקטע $[-1,1]$ על ידי פולינומים מדרגות $1,3,5$. יש להשתמש בריבועים זעירים עם פונקצית משקל $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. באיזה דרגה של פולינום צריך להתשתמש כדי לקבל טעות מקסימלית קטנה מ-10^{-6}?

ג. כמה איברים צריך לקחת בפיתוח הטיילור של $\sin(\pi x/2)$ מסביב ל-$x = 0$ כדי לקבל קירוב פולינומי עם טעות קטנה מ-10^{-6} עבור כל x בקטע $[-1,1]$?

6. א. הוכח שניתן למצוא סדרה יחידה של פולינומים $p_n(x)$, $n = 0,1,2,\ldots$, כך ש-$p_n(x)$ הוא מדרגה n, המקדם של x^n ב-$p_n(x)$ הוא 1, ו-

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)p_m(x) + p_n'(x)p_m'(x) \ dx = 0 \ , \qquad n \neq m$$

מצא את $p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$.

ב. נתונה פונקציה $f(x)$ על הקטע $[-1,1]$, ודרוש למצוא פולנים $p(x)$ מדרגה N כך שסכום השאריות

$$S_1 = \int_{-1}^{1} (f(x) - p(x))^2 + (f'(x) - p'(x))^2 \ dx$$

הוא כמה שאפשר יותר קטן. איך ניתן לבחור את המקדמים a_n, $n = 0,1,\ldots,N$ כך ש-$p(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n p_n(x)$ הוא הפולינום הרצוי ? (כאן ה-$p_n(x)$ הם הפולינומים שמצאת בסעיף א.)