בס"ד

שיטות נומריות, 88-376 **ד"ר ג'רמי שיף**

תרגילים: ביון

1. מצא (ללא שימוש במחשב!) את פולינום הביון עבור הנתונים הבאים:

x_i	0	1	2	4
y_i	1	1	2	5

2. א. הוכח שאם בוחרים את הנקודות (x_i, y_i) באופן סימטרי, במובן ש-

$$(x_i, y_i) = (-x_{n-i}, -y_{n-i}) \ , \qquad i = 0, \ldots, n$$

אזי פולינום הביון העובר דרך הנקודות הוא אי-זוגי.

ב. הוכח שאם בוחרים את הנקודות (x_i, y_i) באופן סימטרי, במובן ש-

$$(x_i, y_i) = (-x_{n-i}, y_{n-i}) \ , \qquad i = 0, \ldots, n$$

אזי פולינום הביון העובר דרך הנקודות הוא זוגי.

ג. מה ניתן להגיד במקרה של "סימטריה מסביב לנקודה (a, b)", כלומר או

$$(x_i - a, y_i - b) = (-(x_{n-i} - a), -(y_{n-i} - b)) \ , \qquad i = 0, \ldots, n$$

או

$$(x_i - a, y_i - b) = (-(x_{n-i} - a), (y_{n-i} - b)) \ , \qquad i = 0, \ldots, n$$

ד. הצע אלגוריתם למצוא את פולינום הביון במקרה של סימטריה מסביב לנקודה כמו בסעיף הקודם, והשתמש בו למצוא (ללא שימוש במחשב!) את פולינום הביון עבור הנתונים הבאים:

x_i	2	2.5	3	4.5	5	5.5
y_i	1.0	1.1	1.0	0.7	0.6	0.7

3. הוכח במפורש במקרים $n = 1, 2, 3$ ש-

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

עבור n כללי, הוכח את הנוסחה על ידי אנדוקציה.

4. הוכח שההפרשים המחולקים הראשונים והשניים נתונים על ידי

$$y_{ij} = \frac{y_i}{x_i - x_j} + \frac{y_j}{x_j - x_i}$$

$$y_{ijk} = \frac{y_i}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)} + \frac{y_j}{(x_j - x_k)(x_j - x_i)} + \frac{y_k}{(x_k - x_i)(x_k - x_j)}$$

ולכן הם סימטריים (זאת אומרת $y_{ij} = y_{ji}$, $y_{ijk} = y_{jik} = y_{jki} = y_{kji} = y_{kij} = y_{ikj}$).
ביותר כלליות הוכח על ידי אנדוקציה ש

$$y_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \sum_{s=1}^{r} \frac{y_{i_s}}{(x_{i_s} - x_{i_1})\ldots(x_{i_s} - x_{i_{s-1}})(x_{i_s} - x_{i_{s+1}})\ldots(x_{i_s} - x_{i_r})}$$

5. א. יהא $p(x)$ פולינום הביון עבור הנתונים

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a

כאשר a הוא פרמטר ממשי. מצא, על ידי ניסוי במחשב, את ההתנהגות של $p(0.5)$ ו-$p(5.5)$ כפונקציות של a עבור a בין 0 ל-50000.

ב. יהא $p(x)$ cubic spline עבור הנתונים

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a

כאשר a הוא פרמטר ממשי. מצא, על ידי ניסוי במחשב, את ההתנהגות של $p(0.5)$ ו-$p(5.5)$ כפונקציות של a עבור a בין 0 ל-50000.
מה היא המשמעות של התוצאות שמצאת לגבי רגישות פולינום הביון ורגישות ה- cubic spline לשינויים בנקודה אחת?

6. א. יהא n שלם חיובי גדול מ-2, ויהא $p_n(x)$ פולינום הביון עבור הנתונים

x_i	0	$\frac{\pi}{2n}$	$\frac{2\pi}{2n}$	$\frac{3\pi}{2n}$	$\ldots$	$\frac{\pi}{2}$
y_i	0	$\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$	$\sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right)$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2n}\right)$	$\ldots$	1

איך ניתן למצוא במחשב את הערך המקסימלי של $|\sin(x) - p_n(x)|$ על הקטע x בין 0 ל-$\frac{\pi}{2}$? מצא את זה במקרים $n = 5, 10, 15, 20$.

ב. חזור על סעיף א. כאשר עכשיו $p_n(x)$ הוא cubic spline.
מה היא המשמעות של התוצאות שמצאת לגבי התלות על ה"טעות" בביון פולינומי ובביון של ידי cubic splines במספר הנקודות הנתונות?

7. א. יהא $p(x)$ פולינום הביון עבור הנתונים

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-3	-2	-1	a	1	2	3

כאשר a הוא פרמטר עם $-1 < a < 1$. על ידי ניסוי במחשב, מצא עבור איזה ערכים של a יוצא $p(x)$ להיות מונוטוני עולה על הקטה $-3 < x < 3$.

ב. יהא $p(x)$ cubic spline עבור הנתונים

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-3	-2	-1	a	1	2	3

כאשר a הוא פרמטר עם $-1 < a < 1$. על ידי ניסוי במחשב, מצא עבור איזה ערכים של a יוצא $p(x)$ להיות מונוטוני עולה על הקטה $-3 < x < 3$.