בס"ד

ד"ר ג'רמי שיף

שיטות נומריות, 88-376

תרגילים: חישובים נומריים באלג'ברה ליניארית

1. מצא את הפתרון x של המערכת $Ax = b$ כאשר A היא מטריצה $N \times N$ ו-b הוא ווקטור ממימד N כדלהלן:

$$A = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1^2}{(N+1)^4} & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 - \frac{2^2}{(N+1)^4} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 - \frac{3^2}{(N+1)^4} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 - \frac{4^2}{(N+1)^4} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 - \frac{N^2}{(N+1)^4} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} \frac{1}{(N+1)^3} \\ \frac{2}{(N+1)^3} \\ \frac{3}{(N+1)^3} \\ \vdots \\ \frac{N}{(N+1)^3} \end{pmatrix}$$

יש לקחת $N = 10, 100, 1000$. בכל מקרה יש להציג את הפתרון בצורה גרפית (דרך `plot(x)` ב-Matlab), ולמצוא את הערך של רכיב המקסימלי של x. צייר גם גרף של הערך של הרכיב המקסימלי, כפונקציה של N, עבור N מ-100 עד 300.

2. פתור את המערכת $Ax = b$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} -1.45 & 15.0 & -2.80 & 1.18 \\ -2.62 & 13.7 & -0.903 & 0.897 \\ 2.44 & 12.3 & -0.662 & 0.834 \\ 3.12 & 0.600 & -4.32 & 0.937 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} \alpha \\ 3.4 \\ 3.0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ו-α מקבל את הערכים $3.6, 3.7, 3.8, 3.9$. מה היא המשמעות של תוצאות אלה לגבי מספר המצב של המטריצה A?

3. א. מטריצת הילברט ממימד N היא המטריצה H מגודל $N \times N$ עם רכיבים

$$H_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \qquad 1 \le i,j \le N$$

מצא את מספרי המצב של מטריצות הילברט ממימדים 2 עד 20.

ב. תהא H מטריצת הילברט ממימד 5. בחר b ווקטור ממימד 5 עם רכיבים רנדומליים בין 0 ל-1, ו-Δb ווקטור ממימד 5 עם רכיבים רנדומליים בין 0 ל-10^{-6}. חשב את x, הפתרון של $Hx = b$, ואת Δx, הפתרון של $H(\Delta x) = \Delta b$. מה הוא היחס בין $||\Delta x||/||x||$ ו-$||\Delta b||/||b||$? האם זה מפתיע ?

ג. חזור על התהליך בסעיף ב. 100000 פעמים. כמה פעמים יוצא היחס להיות גדול מ-10^2? כמה פעמים יוצא היחס להיות גדול מ-10^3 ?

הערה: ווקטור ממימד 5 עם רכיבים רנדומליים בין 0 ל-1 מייצרים ב-Matlab על ידי הפקודה `rand(5,1)`.

4. א. כתוב תוכנה לחשב את מספר המצב הממוצע של 10000 מטריצות 4×4 עם רכיבים רנדומליים בין 0 ל-1.

ב. הרץ את התוכנה כמה פעמים. האם התשובות שאתה מקבל עקביות?

ג. מצא, בהרצה אחת של התוכנה, כמה פעמים מופיעות מטריצות עם מספר מצב מעל 5000, מעל 10000 ומעל 20000. האם זה עוזר להסביר את התופעות מסעיף ב.?

5. א. הוכח שאם מטריצה U היא אורתוגונלית, כלומר $UU^T = I$, אזי בנורמה 2, $\kappa(U) = 1$.

ב. הוכח שאם מטריצה U היא אורתוגונלית, אזי לכל מטריצה A, $\kappa(A) = \kappa(AU)$, שוב בנורמה 2.

ג. הוכח שאם ניתן לפרק את המטריצה A בצורה UDV, כאשר U ו-V אורתוגונליות ו-D אלכסונית, אזי מספר המצב של A, בנורמה 2, הוא היחס בין הערך הכי גדול של D בערך מוחלט לערך הכי קטן של D בערך מוחלט.