בס"ד

שיטות נומריות, 88-376 — ד"ר ג'רמי שיף

תרגילים: פתרון משוואות לא-ליניאריות

1. א. כמה שורשים ממשיים יש למשוואה $x^3+x^2-x-\frac{1}{2}=0$?
ב. מצא את כל אחד מהשורשים לדיוק של חלק 1 תוך 10^3 על ידי שיטת חציית קטעים.
ג. מצא את כל אחד מהשורשים לדיוק של חלק 1 תוך 10^9 על ידי שיטת ניוטון (לקירובים ראשונים השתמש בתוצאות של סעיף ב).
ד. בדוק את ההתכנסות של שיטת ניוטון עבור בחירות שונות של x_0
(נסה, לדוגמה, $x_0=-3,-2,-\frac{5}{4},-\frac{7}{8},-\frac{3}{4},0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},1,2$).

2. חזור על שאלה 1 עבור המשוואה $x^3+x^2-x+\frac{1}{2}=0$. ערכים מומלצים של x_0: $-3,-2,-\frac{3}{2},0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},1,2,3,5,6$. לכל ערך של x_0 יש למצוא את מספר האטראציות הנדרש כדי לקבל את השורש בדיוק של חלק 1 תוך 10^9.

3. אם ניתן לכתוב את המשוואה $f(x)=0$ בצורה $x=\phi(x)$ אזי יתכן שניתן להשתמש בנוסחת הנסיגה $x_{n+1}=\phi(x_n)$ למצוא את שורשי המשוואה. למשוואה $x^3+2x-3=0$, על ידי איזה מהרקורסיות הבאות ניתן לגלות את השורש $x=1$?

$$x_{n+1}=\frac{3}{2+x_n^2} \qquad (1$$

$$x_{n+1}=\frac{2x_n^3+3}{3x_n^2+2} \qquad (2$$

$$x_{n+1}=\frac{bx_n^2+3}{x_n^2+bx_n+2} \qquad b>0 \qquad (3$$

$$x_{n+1}=\frac{3-2x_n}{x_n^2} \qquad (4$$

בכל מקרה, אם הרקורסיה מתכנסת לשורש, חשב את סדר וקצב ההתכנסות.

4. על ידי שיטת ניוטון עם קירוב ראשון $(x_0,y_0)=(-0.5,-1.0)$, מצא שורש של המערכת

$$\begin{cases} x^2-y-1=0 \\ y^2+x-\dfrac{1}{2}=0 \end{cases}$$

האם יש עוד פתרונות למערכת זו?

5. למערכת

$$\begin{cases} x^3-3xy^2=1 \\ y^3-3yx^2=0 \end{cases}$$

יש שלושה פתרונות, $(x,y)=(1,0),(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

א. כתוב תוכנית ב-Matlab או ב-Scilab שיכולה לבדוק לאיזה פתרון שיטת ניוטון מתכנסת עבור בחירה מסויימת (x_0,y_0) של תנאי התחלה. (קיימת גם אופציה שהשיטה לא תתכנס. התוכנה צריכה לציין אם אחרי מאה סיבובים אין סימני התכנסות.)

ב. כתוב תוכנית אשר מחלקת תחום במישור למלבנים קטנים, וצובעת כל מלבן קטן או אדום, או כחול, או שחור, לפי איזה משלושת השורשים שיטת ניוטון מתכנסת כאשר לוקחים תנאי התחלה באותו מלבן. (פקודות שימושיות: `rectangle` ב-Matlab, `xrect, xrects, xfrect` ב-Scilab.)

(עיין באתר הקורס קשרים בנושא "שיטת ניוטון ופרקטלים")

6. א. בדוק שאם $A=10$ יש למערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 1-u_1^2 \\ 1-u_2^2 \\ 1-u_3^2 \end{pmatrix}$$

8 פתרונות, קרובים לשמונה הנקודות $(u_1,u_2,u_3)=(\pm1,\pm1,\pm1)$.

ב. כמה פתרונות יש למערכת אם $A=0$?

ג. מה קורה ל-8 הפתרונות כאשר משנים את A באופן רציף בין 10 ל-0?

ד. תאר את התפתחות הפתרונות המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 1-u_1^2 \\ 1-u_2^2 \\ 1-u_3^2 \\ 1-u_4^2 \end{pmatrix}$$

כאשר A משתנה מ-10 עד 0.