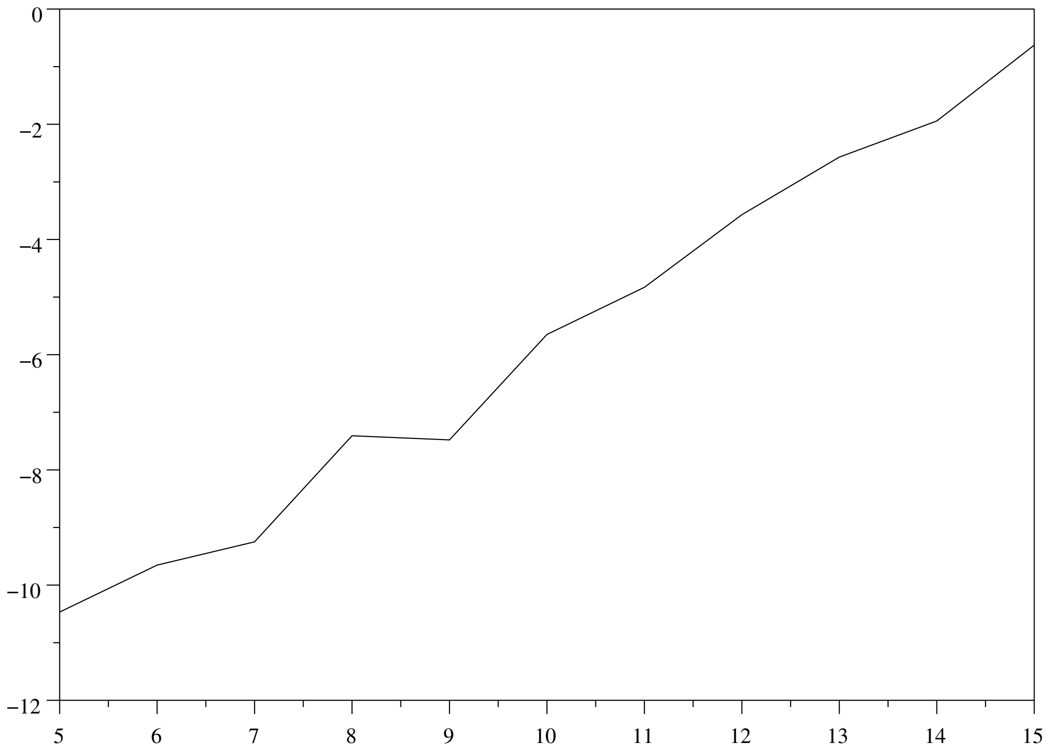
בס"ד

שיטות נומריות, 88-376   ד"ר ג'רמי שיף

תרגילים: אנליזת טעויות

1. א. סטודנט שאתה מכיר מתלונן שלימדו אותו שלכל שלם n, $\sin n\pi = 0$, אבל כאשר ב-Matlab הוא כותב `sin(3.141592653e16)` הוא קיבל את התשובה -0.55180. למה הוא טועה? האם היה מקבל תשובה מדוייקת יותר אם היה כותב `sin(3.14159265358979312e16)` ?

ב. להלן גרף של הערכים שמקבלים ב-Matlab של $\log_{10}|\sin(3.14159265358979312 \times 10^x)|$ עבור x שלם בין 5 ל-15. על ידי אומדן מספר המצב לחישוב $\sin(y)$, הסבר את צורת הגרף.



2. א. תן הסבר אינטואיטיבי למה הפונקציה

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+10y^2}$$

היא לא רגישה לטעויות קטנות ב-x ו-y כאשר לפחות אחד מהם גדול, אבל כן רגישה כאשר שניהם קטנים, ואז היא רגישה במיוחד לטעויות ב-y.

ב. מצא את מספר במצב, בנורמה 2, לחישוב פונקציה הזו. (התשובה צריכה להיות פונקציה $\kappa(x,y)$ כך שאם עושים שינוי קטן $(\Delta x, \Delta y)$ ב-(x,y) וזה גורם שינוי קטן Δf בפונקציה, אזי

$$\frac{\Delta f}{|f|} \leq \kappa(x,y) \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \ ,$$

כלומר, הטעות היחסית בפלט קטן או שווה מ-κ כפול הטעות היחסית בקלט.) הסבר איך התכונות שהוזכרו בסעיף א. מסתדרות עם ה-κ שמצאת.

3. בחישוב של הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x) = x^4$ יש 3 מקורות של טעות:
   1. במקום לחשב עם ה-x האמיתי, משתמשים ב-x שגוי קצת, שנסמן $x + \Delta x$.
   2. משתמשים בקירוב לנגזרת

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

   כאשר h קטן.
   3. מחשבים עם מחשב המעגל מספרים לפי התקן הרגיל.

כתוב אומדנות לגודל השגיאה מ-3 המקורות, ומצא תנאים על $x, \Delta x, h$ כך שכל אחד מהמקורות הופך להיות המקור הראשי של טעות.