בס"ד

שיטות נומריות, 376-88
מבחן מועד א2', סמסטר א' תשס"ג

ד"ר יעקוב קרסנוב
פרופ' ג'רמי שיף

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס מדעי (אבל לא מחשב נייד).
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות, כל שאלה שווה 20 נקודות.
יש לנמק היטב כל תשובה!

1. אם $f(x)$ גזירה פעמיים אזי

$$f''(x) + 2f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)f(x+h) - 2f(x) + (1-h)f(x-h)}{h^2}$$

לכן ניתן לעשות קירוב ל-$f''(x) + 2f'(x)$ על ידי הנוסחה בצד ימין למעלה, אם h מספר ממשי קטן.

א. אם מפעילים קיורב זה במקרה $f(x) = x^3$ מה תהיה הטעות (כפונקציה של h) ?

ב. אם מפעילים קיורב זה במקרה $f(x) = x^3$ על מחשב שנותן טעויות יחסיות לא יותר מ-ϵ, מה תהיה שגיאת העיגול הכי גדול שאפשר ?

ג. כאשר ב-Matlab או Scilab כותבים

```
x = 1;
h = 10.^[-8:-1];
( (1+h).*(x+h).^3 - 2*x^3 + (1-h).*(x-h).^3 ) ./ h.^2
```

מקבלים תשובה

```
6.6613  12.0348  11.9997  12.0000  12.0000  12.0000  12.0002  12.0200
```

הסבר, לאור התוצאות שלך מסעיפים א. ו-ב. מה הוא סדר הגודל של ϵ?

2. א. מצא את נקודות השבת של הרקורסיה

$$x_{n+1} = 1 - \frac{9}{2}x_n^2(1 - x_n)$$

ב. כאשר מפעילים את הרקורסיה עם $x_0 = 0.3$ מקבלים את התוצאות הבאות:

$$x_1 = 0.71650$$
$$x_2 = 0.34507$$
$$x_3 = 0.64908$$
$$x_4 = 0.33470$$
$$x_5 = 0.66461$$
$$x_6 = 0.33335$$
$$x_7 = 0.66664$$
$$x_8 = 0.33333$$
$$x_9 = 0.66667$$
$$x_{10} = 0.33333$$

הוכח שלרקורסיה יש מחזור ממחזור (מסדר 2 בערכים $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$. למה הרקורסיה לא מתכנסת לאחת מנקודות השבת?

ג. איך היית מנסח את המושג של התכנסות ריבועית למחזור ממחזור (מסדר) שנים? האם בדוגמה בשאלה זאת ההתכנסות היא ריבועית?

3. א. אם `A` היא מטריצה ריבועית, מה היא משמעות הפקודה `cond(A,2)` ב-Matlab (או `cond(A)` ב-Scilab)?

ב. אם

$$A = \begin{pmatrix} 1.03 & 2.96 & -2.18 & 3.35 \\ -3.40 & -7.78 & 0.173 & -2.56 \\ 7.79 & 7.77 & 5.16 & 3.03 \\ 2.13 & 0.137 & 1.23 & 1.98 \end{pmatrix}$$

אזי ל-3 ספרות דיוק

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -584 & -628 & -421 & 820 \\ 154 & 166 & 111 & -217 \\ 451 & 486 & 326 & -634 \\ 337 & 363 & 243 & -473 \end{pmatrix}$$

מצא אומדן למספר המצב של A בנורמה 1 (תזכורת: $||A||_1 = \max_j \sum_i |A_{ij}|$).

ג. אם A היא המטריצה מסעיף ב. ו-x_1, x_2 הם הפתרונות של $Ax_1 = b_1$ ו-$Ax_2 = b_2$, כאשר

$$b_1 = \begin{pmatrix} -0.143 \\ 2.12 \\ 2.12 \\ 0.121 \end{pmatrix} \quad , \qquad b_2 = \begin{pmatrix} -0.144 \\ 2.12 \\ 2.12 \\ 0.121 \end{pmatrix}$$

יוצא של-3 ספרות דיוק $x_1 = x_2$. האם זה מפתיע?

ד. אם A היא המטריצה מסעיף ב. ו-y_1, y_2 הם הפתרונות של $Ay_1 = c_1$ ו-$Ay_2 = c_2$, כאשר

$$c_1 = \begin{pmatrix} 0.493 \\ -0.845 \\ 0.278 \\ -0.154 \end{pmatrix} \quad , \qquad c_2 = \begin{pmatrix} 0.495 \\ -0.846 \\ 0.276 \\ -0.155 \end{pmatrix}$$

יוצא ל-3 ספרות דיוק ש-

$$y_1 = \begin{pmatrix} -0.326 \\ 0.199 \\ 0.148 \\ 0.168 \end{pmatrix} \quad , \qquad y_2 = \begin{pmatrix} -0.844 \\ 0.336 \\ 0.547 \\ 0.466 \end{pmatrix}$$

האם זה מפתיע?

4. א. הסבר, בקצרה, את השימוש בפקודה spline ב-Matlab או splin ב-Scilab.
ב. כתוב במפורש את כל התנאים על המקדמים $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3$ כך ש-

$$s(x) = \begin{cases} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ , & -1 \le x \le 0 \\ b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \ , & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

יהיה natural cubic spline על הקטע $-1 \le x \le 1$, עם הערכים

$$s(-1) = 1, \qquad s(0) = 0, \qquad s(1) = 1$$

פתור את המשוואות שכתבת, למצוא את $s(x)$ במפורש.

5. נדרש למצוא a, b כך ש-$y_i \approx ae^{bx_i}$ עבור הנתונים הבאים:

x_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
y_i	1.1	1.4	1.8	2.3	3.0

א. מצא כזה a, b על ידי שימוש בהערה שאם $y_i \approx ae^{bx_i}$ אזי $\ln y_i \approx \ln a + bx_i$, ושימוש בשיטת ריבועים מזעריים (ריבועים זעירים).

ב. האם ה-a, b שמצאת בסעיף א. הם זהים למה שהיית מוצא אם היית דורש ש-

$$S(a,b) = \sum_i \left(y_i - ae^{bx_i}\right)^2$$

יהיה מינימלי? הוכח שה-$S(a,b)$ הזה מינימלי אם ורק אם

$$\begin{aligned} a\sum e^{2bx_i} &= \sum y_i e^{bx_i} \\ a\sum x_i e^{2bx_i} &= \sum x_i y_i e^{bx_i} \end{aligned} .$$

6. א. איך היית מוצא

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{2+\sin x}$$

ב-Matlab או Scilab? יש לכתוב במלואן כל הפונקציות ו/או פקודות שהיית משתמש בהם.

ב. כאשר עושים קירובים לאנטגרל בסעיף א. על ידי כלל הטרפז מקבלים תוצאות כדלהלן:

מספר קטעים	קירוב
2	1.107546964
4	1.084256192
8	1.078869027
16	1.077549242

השתמש בשיטת רומברג למצוא קירוב משופר מהתוצאות האלה.

ג. איזה קירוב מקבלים לאנטגרל על ידי שימוש בתרבוע גאוס (Gaussian Quadrature) עם 3 קודקודים ? (הקודקודים: $\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$, המשקלות $\left(\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}\right)$ בהתאם.)

בהצלחה!!