בס"ד

שיטות נומריות, 88-376
מבחן מועד א1', סמסטר א' תשס"ג

ד"ר יעקוב קרסנוב
פרופ' ג'רמי שיף

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס מדעי (אבל לא מחשב נייד).
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות, כל שאלה שווה 20 נקודות.
יש לנמק היטב כל תשובה!

1. לפי התאוריה, השורש הקטן של המשוואה הריבועית

$$ax^2 - 200x + 0.001 = 0$$

שואף ל-0.5×10^{-5} כאשר הפרמטר החיובי a שואף ל-0. אבל כאשר מנסים לבדוק את זה ב-Matlab או Scilab, על ידי שכותבים

```
a = [1e-8 1e-7 1e-6 1e-5 1e-4 1e-3];
b = (200 - sqrt(200^2 - 4*0.001*a))./(2*a)
```

מקבלים את התוצאה

```
b = 1.0e-05 * [0.4263 0.4974 0.5002 0.5001 0.5000 0.5000]
```

למה יש טעויות גבוהות לערכים נמוכים של a? הסבר למה תיתכן שגיאה יחסית מסדר גודל 10^{-4} כאשר $a = 10^{-5}$.

2. א. מה היא שיטת ניוטון לפתרון מערכת d משוואות עם d נעלמים $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$? (כאן $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$ ו-$\mathbf{f}$ היא פונקציה מ-$\mathbf{R}^d$ ל-$\mathbf{R}^d$)?
   ב. כתוב במפורש את הרקורסיה שמקבלים משיטת ניוטון עבור המערכת

$$x + y + y^2 = 0$$
$$1 + x^2 + y = 0$$

   ג. על ידי העברת המערכת למשוואה אחת (עבור x או y), מצא, ל-3 ספרות דיוק, את הפתרון של המערכת בסעיף ב. שהוא קרוב ל-$x = -0.5, y = -1.5$.

3. א. אם נתונה מטריצה

$$\mathtt{A} = \begin{bmatrix} 0.12 & 2.12 & 0.40 & 1.22 \\ 6.11 & 1.12 & 1.17 & 0.23 \\ 1.01 & -2.21 & 0.54 & -0.55 \\ 3.01 & 0.44 & 3.38 & 0.54 \end{bmatrix}$$

ואני כותב `eig(A)` ב-Matlab או `spec(A)` ב-Scilab אני מקבל כתשובה את הווקטור

$$\begin{bmatrix} 3.8618978 \\ -2.5319143 \\ -1.1495113 \\ 2.1395278 \end{bmatrix}$$

מה הוא הווקטור הזה ? איך ניתן לקבל את כל הערכים העצמיים ואת כל הווקטורים העצמיים של `A` ?

ב. אם ב-Matlab או Scilab כותבים את הפקודות

```
A  = [  1054   557   405   148;
        -265  -115   -89   -26;
         666   327   243    82;
       -1202  -639  -465  -171 ]
b1 = [ 704.5;  -184.9;  454.2;  -803.8 ]
b2 = [ 704.7;  -185.0;  453.3;  -802.6 ]
b3 = [ 704.5;  -187.0;  455.8;  -800.3 ]
x1 = A\b1
x2 = A\b2
x3 = A\b3
```

אזי מקבלים את התוצאות

$$\mathtt{x1} = \begin{pmatrix} -0.0534051 \\ 0.1489345 \\ 3.5205294 \\ -5.0539323 \end{pmatrix} \qquad \mathtt{x2} = \begin{pmatrix} 0.7031195 \\ -0.1883787 \\ 0.4647408 \\ -0.8086555 \end{pmatrix} \qquad \mathtt{x3} = \begin{pmatrix} 0.7161467 \\ 0.7897298 \\ -0.4191235 \\ -2.1652241 \end{pmatrix}$$

מה ניתן להסיק, מתוצאות אלה, לגבי מספר המצב של-A? (יש לתת אומדן כמותי למספר המצב. ניתן לעבוד בכל נורמה שתרצה.)

4. נדרש למצוא קירוב לפונקציה $f(x) = x^3$ על הקטע $[-1, 1]$ על ידי פולינום $p(x)$ מדרגה 2.
   א. מצא כזה קירוב על ידי הדרישה ש-$p(x_i) = f(x_i)$ כאשר $x_i = -1, a, 1$, כאשר a הוא מספר ממשי כל שהוא בין -1 ל-1. כלומר, יש לדרוש ש- $p(-1) = -1$, $p(a) = a^3$, $p(1) = 1$.
   ב. הוכח שאם מציבים $a = 1$ בפולינום $p(x)$ שמצאת בסעיף א. אזי $p(-1) = f(-1)$, $p(1) = f(1)$, $p'(1) = f'(1)$. ואם מציבים $a = -1$ אזי $p(-1) = f(-1)$, $p(1) = f(1)$, $p'(-1) = f'(-1)$.
   ג. הוכח: תהא $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע $[a, b]$, $b > a$, ותהא $p(x)$ פונקציה ליניארית כך ש-$p(a) = f(a)$, $p(b) = f(b)$. יהא $P(x)$ הגבול של $p(x)$ כאשר b שואף ל-a. אזי $P(a) = f(a)$, $P'(a) = f'(a)$.

5. א. הסבר, בקיצור, איך ניתן לעשות קירוב פולינומי לפונקציה $f(x)$ על הקטע $[-1, 1]$ על ידי שיטת ריבועיים מזעריים (ריבועים זעירים) עם פונקציית משקל $w(x) = 1$.
   ב. מצא, באותה שיטה, קירוב ליניארי לפונקציה

$$f(x) = \frac{7 + x}{1 + x^2}$$

בקטע $[-1, 1]$. ניתן לחשב כל אנטגרל רלבנטי על ידי כלל הטרפז, עם n לא קטן מ-4. תזכורות:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{1 + x^2}\, dx = 0\ , \qquad \int_{-1}^{1} \frac{1 + x^2}{1 + x^2}\, dx = 2$$

6. א. מצא את המספרים w ו-$a > 0$ כך שנוסחת התרבוע

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2) f(x) dx \approx w(f(a) + f(-a))$$

היא מדוייקת כאשר $f(x)$ הוא פולינום מדרגה עד 3.

   ב. השתמש בתוצאה שלך מסעיף א. למצוא קירוב ל-

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2) \cos x\, dx$$

   ג. מצא קירובים לאנטגרל מסעיף ב. על ידי כלל הטרפז עם 2 ו-4 קטעים. מה, לדעתך, יהיה יותר מדויק: קירוב על ידי כלל הטרפז עם 16 צעדים או הקירוב שמצאת בסעיף ב. ?

בהצלחה!!